

Grundlagenfragen, Philosophie, Logik.

● Jørgensen, Jørgen: Züge aus der Entwicklung der Deduktionstheorie in der neueren Zeit. Kopenhagen: Levin & Munksgaard 1937. 117 S. [Dänisch].

In diesem Buche gibt Verf. eine Übersicht über die wichtigsten Fortschritte der mathematischen Logik in den letzten (ungefähr 20) Jahren, wobei er sich im wesentlichen auf den Aussagenkalkül beschränkt. Sehr klar erläutert er die Unterscheidung zwischen Objektsprache und Syntaxsprache und die Natur der abstrakten deduktiven Systeme. Auch die Typentheorie wird kurz besprochen. Die Prinzipien der elementaren Deduktionstheorie in „Principia Mathematica“ werden aufgezählt, und es wird gezeigt, daß mehrere Punkte darin sehr unvollkommen sind, wonach die neueren verbesserten Axiomensysteme angegeben werden. — Am interessantesten wird man wohl das letzte Kapitel finden, wo die Analyse des Aussagenkalküls mittels der Matrixmethode und die Aufstellung anderer Systeme dieses Kalküls, in denen die Aussagen mehr als zwei Werte haben können, betrachtet werden. Insbesondere bespricht Verf. die Systeme von Łukasiewicz-Słupecki, Heyting und C. I. Lewis, und setzt auseinander, wie das letzte System und ein weiteres von A. F. Emch als Versuche entstanden sind, den Mangel in „Principia Mathematica“, daß dort nicht zwischen der Implikation einerseits und der logischen Folge andererseits unterschieden wird, zu beheben. Während die Implikation zur Objektsprache gehört, gehört die logische Folge zur Syntaxsprache, und ihre Bedeutung ist relativ aufzufassen, nämlich in bezug auf die Regeln des betrachteten logischen Systems. Zum Schluß bespricht Verf. die Untersuchungen von Tarski über deduktive Systeme und den Gödelschen Beweis der Existenz nicht entscheidbarer Sätze in den Systemen, welche die gewöhnliche Arithmetik enthalten.

Th. Skolem (Bergen).

Kalmár, László: Zur Reduktion des Entscheidungsproblems. Norsk mat. Tidsskr. 19, 121—130 (1937).

Der Verf. erklärt und vergleicht die Reduktionsmethode von Skolem (s. dies. Zbl. 15, 338) mit seiner eigenen [Verh. Internat. Kongr. Zürich 2, 337 (1932); im wesentlichen dasselbe Verfahren auch in Compos. Math. 4, 137 (1936), s. dies. Zbl. 15, 338]. Mit Hilfe der letzten Methode ergibt sich folgendes: I. Für jeden Zähl Ausdruck (des engeren Funktionenkalküls) kann man einen gleichwertigen Zähl Ausdruck B angeben, der nur eine einzige, und zwar binäre, Funktionsvariable enthält und dabei ein Präfix von der Form: $(Ex_1) \dots (Ex_m)(y_1)(y_2)(y_3)(y_4)(Ev_1) \dots (Ev_n)$ — oder, wenn man will: $(Ex_1) \dots (Ex_m)(y_1)(y_2)(Ez)(u)(Ev_1) \dots (Ev_n)$ — hat. II. B kann auch in der nicht-pränexen Form $(Ex_1) \dots (Ex_m)(Z_1 \& Z_2)$ geschrieben werden, wobei die Präfixform von Z_1 : $(y_1)(y_2)(y_3)(Ev_1) \dots (Ev_n)$ und die von Z_2 : $(y_1)(y_2)(y_3)(y_4)$ bzw. $(y_1)(y_2)(Ez)(u)$ ist. — Anm. d. Ref.: 1. Im Präfix von B bei Skolem treten mehr Allzeichen, nämlich 6, auf. 2. Es ließe sich noch für die Zahl m eine feste obere Schranke finden. 3. Druckfehler: S. 125 Z. 11, anstatt „ $R(y, z)$ “ und „ $R(y, u)$ “ soll es „ $R(y_h, z)$ “ und „ $R(y_h, u)$ “ heißen.

A. Lindenbaum (Warszawa).

Fitch, Frederic B.: Modal functions in two-valued logic. J. Symbolic Logic 2, 125—128 (1937).

Carnap faßt die modalen Begriffe syntaktisch auf, Lewis betrachtet sie als unableitbar aus den anderen und führt sie — im System der „strict implication“ — durch Postulate ein. Nun entwirft der Verf. eine dritte, relativistische Theorie dieser Begriffe auf der Basis des gewöhnlichen, zweiwertigen Aussagenkalküls. Zuerst soll eine (fast beliebige) Untermenge S in der Menge aller Aussagen ausgezeichnet werden;

eine modale Funktion eines Ausdrucks a „relativ zu S “ erhält man dann durch gewisse versteckte Quantifikationen (Bindungen) in bezug auf alle diejenigen Elemente von S , die in a frei auftreten. (Analoges Verfahren wird für die Modalitäten im Prädikatenkalkül vorgeschlagen.) Mit solcher Definition der Grundbegriffe werden die Huntingtonschen Postulate (s. dies. Zbl. 17, 145) für das System der „strict implication“ beweisbar. — Anm. d. Ref.: 1. Die Stellung des Verf. solchen kaum annehmbaren Aussagen, wie „ $|P| \prec |\sim P|$ “ („ $|X|$ “ heißt „ X ist notwendig“), gegenüber, welche beweisbar zu sein scheinen, bleibt unerörtert. 2. Will man die üblichen Regeln des zweiwertigen Aussagenkalküls behalten, so muß man das Verfahren des Verf. auch als syntaktisch ansehen.

A. Lindenbaum (Warszawa).

Naidu, P. S.: An examination of the Lachelier expansion. *J. Annamalai Univ.* 7, 1—5 (1937).

Die Lacheliersche Zurückführung der unmittelbaren Schlüsse Subalternation, Kontraposition und Konversion auf kategorische Syllogismen wird einer kritischen Erörterung unterzogen.

Arnold Schmidt (Marburg, Lahn).

Algebra und Zahlentheorie.

Denk, Franz: Über die Eindeutigkeit der Zerlegung der Permutationen geordneter Elemente. *J. reine angew. Math.* 178, 127—128 (1937).

In einer vorigen Arbeit (*J. reine angew. Math.* 176, 18—24; dies. Zbl. 15, 54) hat Verf. bewiesen, daß jedes reduzible Sehnengeflecht in Primfaktoren zerlegt werden kann. Verf. wurde durch Schönhardt darauf aufmerksam gemacht, daß diese Zerlegung nicht immer eindeutig zu sein braucht. Die Eindeutigkeit der Zerlegung läßt sich aber beweisen, wenn jede Sehne eines Sehnengeflechts P_n , von der die übrigen Sehnungen von P_n geschnitten werden, ebenfalls als Faktor betrachtet wird. Es werden auch die Eigenschaften der verschiedenen Faktoren untersucht. *Sz. Nagy* (Szeged).

Flood, M. M.: The resultant matrix of two polynomials. *Bull. Amer. Math. Soc.* 43, 724—729 (1937).

D'après Frobenius [*J. f. Math.* 84, 11 (1877)] si P est une matrice dont la fonction caractéristique est $P(x)$ et si $P_0(x)$ soit un second polynome, le résultant de $P_0(x)$ et $P(x)$ est le déterminant de la résultante matrice $P_0(P)$. L'auteur définit une matrice complémentaire de P et démontre que $P_0(P)$ peut-être utilisée pour obtenir les restes de division en appliquant l'algorithme d'Euclide sur $P_0(x)$ et $P(x)$. *N. Obrechhoff*.

Conte, Luigi: A proposito d'una equazione a matrice circolante. *Boll. Un. Mat. Ital.* 16, 226—227 (1937).

Browne, E. T.: Sets of conjugate matrices. *Amer. J. Math.* 59, 845—868 (1937).

The author gives a method for deriving the most general sets of conjugate matrices which are expressible as polynomials in any given n -square matrix M . A set of n -square matrices M_j ($j = 1, 2, \dots, v-1$), is called a set of conjugates to M if (I) the M_j 's are commutative in pairs and (II) $(\lambda - M)(\lambda - M_1) \dots (\lambda - M_{v-1}) \equiv \varphi(\lambda)$, where λ is a scalar and $\varphi(\lambda)$ is a scalar polynomial. He chooses $\varphi(\lambda)$ as the reduced characteristic function of M . If M is non-derogatory all sets of conjugates to M can be found by his method. If M is derogatory a method is given for obtaining many, but not all, sets of conjugates to M . However these conjugates are not expressible as polynomials in M . A detailed discussion of cyclic sets of conjugates is also included. *Sokolnikoff*.

Oldenburger, Rufus: Real canonical binary symmetric trilinear forms. *Bull. Amer. Math. Soc.* 43, 546—553 (1937).

The author considers the question of equivalence of real binary trilinear forms of the type $\sum_1^2 a_{ijk} x_i y_j y_k$ ($a_{ijk} = a_{ikj}$) under the real non-singular transformations $x'_i = \sum b_{ie} x_e$, $y'_i = \sum c_{ie} y_e$. He shows that a necessary and sufficient condition for this type of equivalence is that the forms have the same ranks r_i, r_j, r_k previously

defined by the author (cf. this Zbl. 9, 338) and that the associated quadratic forms $|\varrho a_{1jk} + \sigma a_{2jk}|$ have the same rank and index. There are in all six inequivalent classes of forms. Normal forms are given. *Jacobson* (Chapel Hill, N. C.).

Abstrakte Theorie der Ringe, Körper und Verwandtes:

Glivenko, V.: Contribution à l'étude des systèmes de choses normées. Amer. J. Math. 59, 941—956 (1937).

This continues earlier researches ["Géométrie des systèmes de choses normées". Amer. J. Math. 58, 799—828 (1936); this Zbl. 15, 243] of the author. He studies lattices with 0 and 1, and an "absolute value" $|a|$ satisfying $|0| = 0$, $|1| = 1$, $a < b$ implies $|a| < |b|$, and $|a \cap b| + |a \cup b| = |a| + |b|$. It is known that such lattices are modular. The author considers the system as a metric space, relative to the distance $\varrho(a, b) = |a \cup b| - |a \cap b|$. He characterizes purely metrically pairs of elements a, a' decomposing the lattice into direct summands [i. e., such that $a \cap a' = 0$, $a \cup a' = 1$, and $x = (a \cap x) \cup (a' \cap x)$ for all x]: these are the elements which can be made "origins" in the sense of a seven-line definition. N. B., this has a graphical interpretation in terms of the Hasse diagrams of lattices of finite dimensions. *Garrett Birkhoff*.

Stone, M. H.: Algebraic characterizations of special Boolean rings. Fundam. Math. 29, 223—303 (1937).

This paper is an exhaustive study of ideals in Boolean rings \mathfrak{R} . For definitions, cf. the author's "The theory of representations for Boolean algebras" (this Zbl. 14, 340). Among the classes of ideals are the classes: J of all ideals, N of "normal" ideals, S of "simple" ideals, P of principal ideals; the author has shown (op. cit.) that in general $J > N > S > P$. — The author first recalls that the ideals form a distributive lattice, in which a non-Boolean complementation is defined. He describes in Tables the nature of joins (or "sums"), meets (or "products"), and complements of ideals of given kinds. Other Tables describe how the behavior of an ideal \mathfrak{X} in \mathfrak{R} determines the behavior of $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{S}$ in a subring \mathfrak{S} of \mathfrak{R} . — The author proves that $N = S$ if and only if products of arbitrarily many elements are defined in \mathfrak{R} ; $S = P$ if and only if \mathfrak{R} has a "unit" e satisfying $ex = xe = x$ for all x ; hence $N = P$ if and only if \mathfrak{R} corresponds to a "complete Boolean algebra" in the usual sense. (The normal ideals correspond to the "cuts" in MacNeille's theory of completing Boolean algebras.) On the other hand, $J = P$ if and only if the algebra is finite (this is most easily seen, if we remember that finite order is implied by either chain condition). — The paper contains many other results — some relate to Tarski's notion of an "atomic basis"; others to a notion of a "barrier ideal" suggested by topological ideas. (E.g., in a countable Boolean algebra, every prime ideal is normal or a barrier ideal.) The author is careful to show that most of his results are "best possible". *Garrett Birkhoff*.

Petiau, Gérard: Sur un système de nombres hypercomplexes dérivé du système des quaternions. C. R. Acad. Sci., Paris 205, 1134—1136 (1937).

Betrachtungen über die bekannte Tatsache, daß das direkte Produkt zweier Quaternionensysteme (mit Koeffizientenkörper = Körper aller komplexen Zahlen) äquivalent ist dem System der Matrizen 4. Grades (Diracmatrizen). *P. Jordan*.

MacNeille, H. M.: Partially ordered sets. Trans. Amer. Math. Soc. 42, 416—460 (1937).

Ausführliche Wiedergabe mit Beweisen der in einer früheren Note des Verf. [Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 22, 45—50 (1936); dies. Zbl. 13, 243] angekündigten Ergebnisse.

G. Köthe (Münster i. W.).

Scorza, G.: Sulle algebre legate ai gruppi di ordine finito. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 25, 683—685 (1937).

Démonstration directe du théorème de Maschke: Pour qu'une algèbre A sur un corps Γ représentant un groupe fini G d'ordre n soit semi-simple, il faut et il suffit que n ne soit pas multiple de la caractéristique de Γ . *P. Dubreil* (Nancy).

Venkatarayudu, T.: On the automorphisms of the vector ring mod (M_1, M_2, \dots, M_n) . J. Indian Math. Soc., N. s. 2, 295—301 (1937).

Die Automorphismengruppe der direkten Summe von endlich vielen Ringen, deren jeder aus den Restklassen modulo einer ganzen Zahl besteht, ist zerlegbar in das direkte Produkt von symmetrischen Gruppen. Magnus (Frankfurt a. M.).

Chow, Wei-Liang: Die geometrische Theorie der algebraischen Funktionen für beliebige vollkommene Körper. Math. Ann. 114, 655—682 (1937).

The geometric theory of algebraic functions of one variable (theory of linear series on an algebraic curve) up to and including the Riemann-Roch theorem, is developed anew in this paper, for arbitrary algebraically perfect (vollkommen) fields, the stress being laid upon the systematic application of the "true specialization" in the sense of van der Waerden. The preliminaries deal with the general and special points of a curve, intersection multiplicities and the theorem of Bezout. On this basis the linear series are introduced and proofs are given for the theorem of Bertini (also for fields of characteristic $p \neq 0$), the invariance of linear series under birational transformations and the possibility of resolving the singularities of an algebraic curve. The proof of this last theorem follows the lines of the proof of Albanese, and it is here that the restriction to algebraically perfect fields becomes necessary. The resolution of singularities leads to the notion of a branch expressed in terms of formal power series, and the rest of the theory now runs smoothly and rapidly to its completion along the lines of the "metodo rapido" of Severi. O. Zariski (Baltimore).

Rados, Gustav: Beitrag zur Theorie der algebraischen Zahlkörper. Mat. termézet. Értes 56, Tl 1, 49—52 (1937) [Ungarisch].

Es wird der folgende Satz bewiesen: Ist \mathfrak{p} ein Primideal eines Galoisschen Zahlkörpers von der Beschaffenheit, daß seine konjugierten Ideale untereinander und von \mathfrak{p} verschieden sind, alsdann liefert die Reihe der ganzen rationalen Zahlen $0, 1, 2, \dots, N(\mathfrak{p}) - 1$ ein vollständiges Restsystem des Moduls \mathfrak{p} . Autoreferat.

Zahlentheorie:

● Kowalewski, Gerhard: Magische Quadrate und magische Parkette. (Scientia Delectans. Gemeinverständl. Darstell. aus d. Unterhaltungsmath. u. aus verwandten Geb. H. 2.) Leipzig: K. F. Köhler 1937. 78 S. u. 10 Fig. RM. 2.—.

Magische Quadrate von 16 Feldern ($a_{i1} a_{i2} a_{i3} a_{i4}$ bedeute die i -te Zeile) mit der zusätzlichen Forderung $a_{12} + a_{43} = a_{31} + a_{24} = 29$, welche $a_{13} + a_{42} = a_{21} + a_{34} = 5$ zur Folge hat. Auch werden die magischen Quadrate bestimmt, in welchen die oben genannten Zahlen 29 und 5 beide = 17 sind. Das Probieren spielt dabei eine Rolle. Ist ein magisches Quadrat der ersten Art zudem panmagisch (diabolisch), so kann man damit durch Wiederholung in der Ebene ein „magisches Parkett“ bilden.

N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).

Kesava Menon, P.: A theorem on congruence. J. Indian Math. Soc., N. s. 2, 332—333 (1937).

The author proves that if p is an odd prime,

$$1^{p-1} + 2^{p-1} + \dots + (p-1)^{p-1} - p - (p-1)! \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

Davenport (Manchester).

Basava Raju, N.: On certain symmetric functions of numbers prime to m . J. Indian Math. Soc., N. s. 2, 308—313 (1937).

Let Σ_k denote the sum of the products k at a time of the positive integers prime to m and not greater than m . The author proves (1) $\Sigma_k \equiv 0 \pmod{m}$ provided that $p \nmid m$ for every prime p such that $(p-1) \mid k$, (2) $\Sigma_k \equiv 0 \pmod{m^2}$ provided that k is odd and $1 < k < \pi - 1$, where π is the least prime factor of m ; and other results of the same kind.

Davenport (Stockport).

Vandiver, H. S.: On generalizations of the numbers of Bernoulli and Euler. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 23, 555—559 (1937).

Let m_r, m_{r-1}, \dots, m_0 be integers, $m_i \neq 0$ ($i = 1, \dots, r$). The author calls $b_n(m_r, m_{r-1}, \dots, m_0)$ a generalized Bernoulli number of the r -th order, where

$$b_n(m_r, \dots, m_0) = (m_r b^{(r)} + m_{r-1} b^{(r-1)} + \dots + m_0)^n, \quad (1)$$

in which the right member is to be expanded by the multinomial theorem and $(b^{(i)})^a$ ($i = 1, \dots, r$) replaced by the ordinary Bernoulli number b_a , defined as usual by $(b+1)^n = b_n$, $n \geq 2$, $b_0 = 1$. The following theorem reduces to the von Staudt-Clausen theorem when $m_1 = 1, m_0 = 0$. For n even, $b_n(m_1, m_0) = A_n - \sum \frac{1}{p}$, where A_n is an integer and the sum is taken over all primes p such that $(p, m_1) = 1$, $(p-1) | n$; for n odd, except when $n = 1$ and m_1 is odd, $b_n(m_1, m_0)$ is an integer, in general $\neq 0$. A method of the author's earlier paper [Ann. of Math. 29, 451—458 (1928)] is indicated whereby an analogous result for the case $r = 2, m_0 = 0$, may be obtained, and it is conjectured that a similar theorem holds in general. Next,

$$e_{n-1}(m, k, l) = \{(mb+k)^n - (mb+l)^n\}/n, \quad m \neq 0, \quad k \neq l, \quad (2)$$

is called a generalized Euler number. This differs from other proposed generalizations [Sylvester, C. R. 52, 163; D. H. Lehmer, Ann. of Math. 36, 648—649 (1935); this Zbl. 12, 151]. The author's theorem (see this Zbl. 17, 100) may be applied to the numbers (2) to obtain analogous properties to those of ordinary Euler numbers. A similar extension of Genocchi numbers is made and, finally, the numbers $t_n(m, k) = ((mb+k)^n - b_n)/n$, related to the tangent coefficient $2^n t_n(2, 0)$, are introduced and some of their properties indicated. Details and proofs of the above are to be given in another paper. Hull (Urbana).

Heegner, Kurt: Transformierbare automorphe Funktionen und quadratische Formen. I. Math. Z. 43, 161—204 (1937).

Das fernere Ziel des Verf. ist das Studium solcher automorpher Funktionen, für die Transformationsgleichungen nach Art der bei den elliptischen Modulformen bekannten existieren. Die Gruppen solcher autom. Funkt. lassen sich aus den reproduzierenden Gruppen ternärer quadratischer Formen mit besonderen arithmetischen Eigenschaften der Koeffizienten gewinnen. Die arithmetische Theorie dieser Formen wird, wie Verf. gefunden hat, besonders einfach, wenn eine Theorie gewisser Bilinearformen vorangeschickt wird. Es sei K_λ ein algebraischer Zahlkörper vom Grade λ , in dem jedes Ideal Hauptideal ist. A sei eine ganze Zahl aus K_λ , die keinen quadratischen Teiler hat und quadratischer Rest von 4 ist. Der Körper $K_\lambda(\sqrt{A})$ hat den Relativgrad 2 und die Relativediskriminante A . n_0, n_1, n_2 seien ganze Zahlen aus K_λ , $n_1^2 - 4n_0n_2 = A$. Alsdann ist $(n_0, \omega) = j_0$, wobei $\omega = \frac{1}{2}(n_1 + \sqrt{A})$, ein ganzes Ideal aus $K_\lambda(\sqrt{A})$ mit der Relativnorm n_0 . Die bisher eingeführten Körper, Zahlen, Ideale werden im folgenden festgehalten. Die zu betrachtenden Bilinearformen sind

$$\Phi = ax\bar{x} + cy\bar{y} + A^{-1/2}(bx\bar{y} - \bar{b}x\bar{y}), \quad (1)$$

wo x, y, \bar{x}, \bar{y} Unbestimmte, a und c ganze Zahlen aus K_λ , jedoch c durch n_0 teilbar, b eine Zahl aus dem Ideal j_0 und \bar{b} die zu b relativ-konjugierte Zahl. Die durch $b\bar{b} + acA = n_0D$ definierte ganze Zahl D aus K_λ heißt Diskriminante der Form Φ . Diese Gattung von Formen, die eine Verallgemeinerung der Hermiteschen Formen darstellt, nennt Verf. „konjugiert-quadratische Bilinearformen“. Zwei solche Formen heißen äquivalent, wenn sie durch eine Substitution

$$\left. \begin{aligned} x &= \alpha x' + \beta y', & \bar{x} &= \bar{\alpha} \bar{x}' + \bar{\beta} \bar{y}', \\ y &= \gamma x' + \delta y', & \bar{y} &= \bar{\gamma} \bar{x}' + \bar{\delta} \bar{y}' \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ineinander übergehen, wo $\alpha, \beta, n_0\gamma, \delta$ ganze Zahlen aus $K_\lambda(\sqrt{A})$, $n_0\gamma$ Zahl aus j_0 , β Zahl aus \bar{j}_0 , $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Vermöge Überganges zu anderen unabhängigen Variablen

lassen sich die Formen Φ auch als quaternäre quadratische Formen schreiben, deren Koeffizienten sämtlich in K_1 liegen. Weiterhin wird vorausgesetzt, daß D zu A prim ist und daß auch D keine quadratischen Teiler hat. Aus dem Reziprozitätsgesetz für quadratische Reste in K_1 folgt eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß bei gegebenem D Formen Φ mit der Diskriminante D existieren. Sodann wird die Darstellung ganzer Zahlen aus K_1 und ternärer quadratischer Formen, deren Koeffizienten ganze Zahlen aus K_1 sind, durch die Formen Φ untersucht. Die Frage nach den Substitutionen (2), die eine Form Φ in sich transformieren (reproduzierende Gruppe der Form Φ), wird zunächst für die speziellen Formen Φ_a beantwortet, in denen a ein Teiler des Ideals $(b) : j_0$ ist, und wird in Zusammenhang mit den reproduzierenden Gruppen gewisser ternärer Formen F gebracht. Ist $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ eine reproduzierende Substitution einer Form Φ_a , so kann die Diskriminante $(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma$ ihrer Fixpunktgleichung $\gamma\zeta^2 - (\alpha - \delta)\zeta - \beta = 0$ als ternäre Form in den Variablen $\alpha - \delta, \beta, \gamma$ angesehen werden. Übergang zu passend gewählten anderen Variablen an Stelle der $\alpha - \delta, \beta, \gamma$ liefert die eben genannten ternären Formen F . Die inhomogen geschriebene reproduzierende Gruppe einer Form Φ_1 , d. i. einer Form Φ mit $a = 1$, heiße Γ . Diese Gruppe steht weiterhin im Mittelpunkt der Untersuchung. Damit Γ in der ζ -Ebene eigentlich diskontinuierlich ist, ist es notwendig und hinreichend, daß K_1 total reell und eine mit Φ_1 zusammenhängende ternäre quadr. Form F selbst indefinit ist, die von ihr verschiedenen mit ihr konjugierten Formen aber sämtlich negativ sind. Wendet man die Formeln, die im Fall der Formen Φ_a die reproduzierende Gruppe lieferten, auf allgemeine Formen Φ an, so findet man, daß man eine durch $\beta \equiv 0 \pmod{m}$ gekennzeichnete Untergruppe $\Gamma_{(m)}$ von Γ erhält. Daran knüpft sich die Formulierung eines „Grundproblems der Kongruenzgruppen“ und die Betrachtung endlicher Gruppen G zweireihiger Matrices, deren Elemente Restklassen \pmod{m} in K_1 sind. Es folgt ein wichtiger Satz über die eigentlichen Darstellungen einer ganzen zur Diskriminante D primen Zahl m durch die Formen Φ , die Einteilung der Formen Φ in Geschlechter und der Nachweis, daß jedes Geschlecht nur eine Klasse enthält (Klassenzahlsatz). Mit Dirichlets transzendenten Methoden wird dann das Maß der positiven Formen Φ und bei den indefiniten Formen der hyperbolische Inhalt des Diskontinuitätsbereichs ihrer reproduzierenden Gruppen bestimmt. — Es sei besonders hervorgehoben, daß Verf. bei seinem Aufbau zum Beweis des Klassenzahlsatzes keine Reduktionstheorie für die von ihm betrachteten Formen benötigt. *Bessel-Hagen (Bonn).*

Heegner, Kurt: Transformierbare automorphe Funktionen und quadratische Formen. II.: Die ternären quadratischen Formen. Math. Z. 43, 321—352 (1937).

Die betrachteten ternären Formen haben die Gestalt

$$f = n_0 x_1^3 + n_1 x_1 x_2 + n_2 x_2^3 + b_1 x_1 x_3 + b_2 x_2 x_3 + a x_3^3,$$

wobei die Koeffizienten ganze Zahlen aus K_1 sind (s. das vorangeh. Ref.). Die mit $-1/4$ multiplizierte Determinante der Koeffizienten heißt Diskriminante D der Form. Es wird $A = n_1^2 - 4n_0 n_2$ gesetzt. Eine Form, bei der D und A keinen quadratischen Teiler haben und bei der A prim zu $2D$ ist, wird Grundform genannt. Jede Form läßt sich durch homogene lineare Substitution mit Koeffizienten aus K_1 nach Absonderung eines Zahlenfaktors in eine Grundform transformieren. Die Bedeutung der Grundformen, auf die die weitere Untersuchung beschränkt wird, liegt darin, daß zu den reproduzierenden Gruppen dieser Formen die einfachsten automorphen Funktionen gehören, aus denen sich alle anderen vermittle der Theorie der Kongruenzuntergruppen ableiten lassen. Aus den reproduzierenden Substitutionen der Formen Φ aus Teil I werden zunächst die reproduzierenden Substitutionen der ternären Formen hergeleitet. Sodann wird der Begriff der „transformierenden Substitution“ eingeführt:

$$z'_i = \alpha_i z_1 + \beta_i z_2 + \gamma_i z_3 \quad (i = 1, 2, 3),$$

wo die Koeffizienten ganze Zahlen aus K_1 ohne gem. Teiler sind, die Determinante $= m^3$,

der gr. gem. Teiler aller Unterdeterminanten $= m$, dabei m eine zu D prime ganze Zahl. Nachdem über die transformierenden Substitutionen eine Reihe von Sätzen bewiesen sind, gelingt es, den Klassenzahlsatz zu beweisen: „Die Klassenzahl eines Geschlechts von Grundformen mit der Diskriminante D beträgt 2^g , wenn g die kleinste Anzahl von Primzahlen q_1, \dots, q_g ist, die erforderlich sind, um aus D eine Zahl $D' = D \cdot \prod_{i=1}^g q_i$ zu bilden, die für jede Zahl m aus K_1 einen Teiler d derart besitzt, daß die $\lambda - 1$ von dm verschiedenen zu dm konjugierten Zahlen positiv sind.“ Mit Hilfe dieses Satzes wird das in Teil I aufgestellte Grundproblem der Kongruenzgruppen vollständig gelöst. Nunmehr kann der Übergang zu den automorphen Funktionen vollzogen werden. Ist f eine Grundform der Diskriminante D und q eine nicht in D aufgehende Primzahl, so besitzt die automorphe Funktion der zugehörigen Gruppe Γ eine Transformationskorrespondenz von leicht auszurechnendem Index $\psi(q)$. Der Rest der Abh. ist der Bestimmung des hyperbolischen Inhalts der Diskontinuitätsbereiche und ihres Geschlechts (im Sinne der Riemannschen Funktionentheorie) gewidmet.

Bessel-Hagen (Bonn).

Mengenlehre und reelle Funktionen.

Hartman, Stanislaw: Zur Geometrisierung der abzählbaren Ordnungstypen. Fundam. Math. 29, 209—214 (1937).

On peut faire correspondre à tout point t du discontinu C de Cantor un type ordinal dénombrable, en épuisant tous ces types. L'ensemble T des $t \in C$ auxquels correspond ainsi un type ordinal donné τ est analytique; mais si, en particulier, τ est un nombre ordinal (dénombrable), T est borelien (C. Kuratowski, voir le réf. suivant). L'auteur précise davantage ce résultat, en montrant que T est encore borelien, lorsque le type τ admet $m(\tau) \leq \aleph_0$ transformations semblables en lui-même. Cependant, cette condition n'étant pas nécessaire (exemple: T est borelien pour $\tau = \eta$), le problème d'une caractérisation complète reste ouvert. Enfin, si $m(\tau) > \aleph_0$, on a toujours $m(\tau) = 2^{\aleph_0}$ et la somme des ensembles T qui correspondent à tous les τ de ce genre est un ensemble analytique.

B. Knaster (Warszawa).

Kuratowski, Casimir: Sur la géométrisation des types d'ordre dénombrable. Fundam. Math. 28, 167—185 (1936).

Let $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ be an arrangement of the rational numbers of the interval $(0, 1)$ in a series without repetitions. Let $t = \sum \frac{t^n}{3^n}$ ($t^n = 0, 2$) be an element of the Cantor set C . Denote by M_t the set of all rational numbers r_n for which $t^n = 2$. The function M_t establishes a biunivocal correspondence between the elements of C and the sets of the rational numbers. Let t be the type of order of the class M_t of rational numbers arranged in order of increasing magnitude. Then all types of order of a countable set are represented in this correspondence. Every set of types of order determines a set of real numbers and is assigned the same projective class. It is shown that all the usual concepts of the theory of order types of a countable set are associated with projective sets, usually sets of class CA (complementary to an analytic set). In this terminology, the set of ordinal numbers $\alpha < \Omega$ is not a Borel set, but every α is Borelian. The fact that the inequality $\alpha = \beta$ is analytic is in reality the base of the demonstration of the "deuxieme princip" of N. Lusin (Ensembles analytiques, Paris 1930, 210). For these order types various fundamental relations such as

$$\tau = \sigma, \tau < \sigma, \tau = \sigma + \varrho, \tau = \sigma \cdot \varrho$$

are analytic, implying the projectivity of the usual concepts. In particular, if $\varphi(\tau)$ is of projective class P_n its negation $\varphi'(\tau)$ is of class C_n . The operations $\prod_{\sigma < \tau}, \sum_{\sigma < \tau}$ do not alter the projective class of the function to which they are applied. The class of a function

$\mu(\tau)$ is determined by the class of the equation $\sigma = \mu(\tau)$. If $\mu(\tau)$ is of class $P_n(n > 0)$ and Φ is a set of ordinals of class $P_n(C_n)$, then $\mu^{-1}(\Phi)$ is of class $P_n(C_n)$, and the inequalities $\sigma \leq \mu(\tau)$, $\sigma < \mu(\tau)$, are of the same class as $\mu(\tau)$. Superposition is a class preserving operation. Let Ψ be a set of types of order. A subset Φ of Ψ is of class $P_n(C_n)$ relative to Ψ if it is the part common to Ψ and a set of class $P_n(C_n)$. A concept is relatively of a projective class if it is of that class relative to the class θ of ordinal numbers $\alpha < \Omega$. Every concept which is of class CA and is relatively analytic is elementary. The elementary sets (or propositional functions) form a Borelian corps. If $\mu(\tau)$ is relatively analytic with arguments and values in θ (or θ^n , θ^{\aleph_0}) and Φ is an elementary set, then $\mu^{-1}(\Phi)$ is elementary. The relations: $\alpha = \beta$, $\alpha \leq \beta$, $\alpha < \beta$, $\beta + \gamma$, $\beta \cdot \gamma$, $\alpha = \beta^\gamma$, are elementary. The characteristic function of an elementary set is elementary. The biunivocal correspondence between the pairs $\alpha, \beta < \Omega$ and the numbers $\gamma < \Omega$ can be realized by an elementary function. These considerations extend readily to the so-called complex types of order of the form (τ_1, τ_2, \dots) with a finite or countable infinity of components. *E. W. Chittenden (Iowa/U.S.A.).*

Kuratowski, Casimir: Les suites transfinies d'ensembles et les ensembles projectifs. *Fundam. Math.* 28, 186—196 (1936).

The methods of the preceding paper can be applied to transfinite series of sets. If Φ is a subset of the cartesian product of the class T of all types of order of a countable set and a given complete separable space X it determines a set F of the space $C \times X$ through the correspondence between C and T defined in the prec. paper. Then the projective class of Φ is that of F . A transfinite series is elementary if it is of class CA and analytic relative to the class $\theta \times X$. If $\mu(x)$, on X to T , is a function of class $P_n(n > 0)$ and Φ is of class $P_n(C_n)$, then $\sum_{\alpha \in \Phi} A_\alpha$ is of class $P_n(C_n)$, $\sum_{\alpha < \Omega} A_\alpha$ is of class C_n , and (if $n > 1$) of class P_n . If the function $\mu(x)$ is of class $P_n(n > 1)$, the series $A_0, A_1, \dots, A_\alpha, \dots$ is simultaneously of class P_n, C_n , and elementary if $\mu(x)$ is analytic. Every double series can be arranged in a simple series of the same projective class. An elementary double series of classes A_α^β determines an elementary double series B_α^β with the same sum such that $B_\alpha^\beta \subset A_\alpha^\beta$. Let W_r be a set-valued function of rational r ('crible' or sieve of Lusin). Set N_x equal to the class of all r such that x belongs to W_r , N_x equal to the order type of N_x , and A_α equal to the class of all x for which $\mu(x) = \alpha$. The sets A_α for $\alpha < \Omega$ are the constituents of the sieve. If for every r and $n > 0$, W_r is simultaneously of class P_n and C_n the function $\mu(x)$ is of class P_n . The sets A_r are of class P_n , the constituents A_α are also of class C_n , the set $\sum_{\alpha < \Omega} A_\alpha$ is of class C_n (if $n > 1$ it is also of class P_n). The series $A_0, A_1, \dots, A_\alpha, \dots$ is elementary for $n = 1$, and of class P_n and C_n for $n > 1$. It is finally shown that every set of class PCA admits a decomposition in a series of analytic sets which is itself relatively analytic: $Z = \sum_{\alpha < \Omega} P_\alpha$. *E. W. Chittenden.*

Kuratowski, Casimir: Sur les suites analytiques d'ensembles. *Fundam. Math.* 29, 54—59 (1937).

Let $\mu(x)$ determine for each point x of a complete separable space a type of order of a countable set. If $\mu(x)$ is analytic (see the first of the two preceding papers) it determines a family of analytic sets $A_\tau = \mu^{-1}(\tau)$, the class of all points x for which $\mu(x) = \tau$. If A is an analytic subset of the sum $\sum_{\alpha < \Omega} A_\alpha$, there is an $\alpha_0 < \Omega$ such that $A \subset \sum_{\alpha < \alpha_0} A_\alpha$.

There is a number α such that the set $\sum_{\xi \geq \alpha_0} A_\xi$ is of the first category. Every set which can be arranged in a series of the type Ω such that $\mu(x_0) < \mu(x_1) < \dots < \mu(x_\alpha) < \dots < \Omega$ is of the first category on every perfect set. *E. W. Chittenden (Iowa/U.S.A.).*

Kuratowski, C., and J. v. Neumann: On some analytic sets defined by transfinite induction. *Ann. of Math.*, II. s. 38, 521—525 (1937).

Using the methods of (the first of the three preceding papers) the authors define a

set T in a space $C \times X \times Y$, where C is the Cantor discontinuum, and X, Y are complete separable spaces. They show that T is the difference of two analytic sets. A set defined by Lebesgue [J. Math., Ser. 6, 1, 213 (1905)] provides an example of a set T .

E. W. Chittenden (Iowa/U.S.A.).

Kunugui, K.: Sur un théorème d'existence dans la théorie des ensembles projectifs. Fundam. Math. 29, 167—181 (1937).

The purpose of the present article is to establish a theorem asserting the existence, under certain conditions, of sets which are simultaneously of a given class of sets and of the class of their complements. Use is made of the method of Kuratowski — developed by him and others in articles appearing largely in the Fundam. Math. — for evaluating projective classes of sets defined by means of transfinite induction. If $\{E_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ is a Souslin system of sets, J the set of irrational numbers between 0 and 1 taken in the form $\nu = (n_1, n_2, \dots, n_k, \dots)$, N a subset of J consisting of all the irrational numbers ν whose coordinates of odd subscript are arbitrary, then $S_N(E_{n_1, n_2, \dots, n_k}) = \sum_{\nu \in N} \prod_k E_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ is termed a quasi-generalized Souslin operation.

S_N is δ -multiplicative if every product of a denumerable infinity of sets of $S_N\{G\}$ belongs to $S_N\{G\}$, where G is the family of all open sets in J . The existence theorem in question is as follows: Let Φ_N be a Hausdorff operation of base N ; R a family of sets of the cartesian space $OXYZ$ subject to the four conditions: 1. $R_C \subset \Phi_N\{R\}$, where R_C means the family of sets which are complements of the sets of R , 2. $R \supset G$, 3. if a function $y = f(x)$ defined in a set M of $OXYZ$ is continuous in M ($y \in OXYZ$), we have $f^{-1}(E) \in R$ for every set E in R , a set being said to be R in M if it is the product of a set M and a set E such that $E \in R$, 4. there exists a planar set belonging to R which is universal for all the linear sets belonging to R ; furthermore, let $\Phi_0 = \Phi_N(R)$, $\Phi_1 = (\Phi_0)_C$, $\Phi_\alpha = \Phi_N\{\sum_{0 \leq \beta < \alpha} \Phi_\beta\}$ for even α , $\Phi_\alpha = (\Phi_{\alpha-1})_C$ for odd α ;

and finally, let S_Θ be a Souslin quasi-generalized and δ -multiplicative operation such that $S_\Theta\{R\}$ contains all analytic complements and $S_\Theta\{G\} \supseteq \Phi_N\{G\}$, $\Phi_{N^c}\{G\}$, N^c designating the base of the Hausdorff operation such that $(\Phi_N\{A\})_C = \Phi_{N^c}\{A_C\}$ for every family A . Under these conditions, there exists in the space $OXYZ$ or in an arbitrary plane a set belonging simultaneously to $S_\Theta\{R\}$ and to $(S_\Theta\{R\})_C$ which is universal for the family of all linear sets Φ_α , $0 \leq \alpha < \Omega$. The proof is made by means of seven lemmas, three of which are: Lemma 2 (which generalizes a theorem of Souslin). For every family R of sets, we have $S_N\{R\} = S_N\{R_A\}$, where S_N is a Souslin quasi-generalized operation, and R_A is the family of all the sets derivable from those of R by means of the Souslin operation (A). Lemma 6. If Φ_N is an operation of Hausdorff and S_N a quasi-generalized operation of Souslin such that $N_1 \in S_N\{G\}$, we have $\Phi_{N_1}\{R\} \subseteq S_N\{R\}$ for every family R of sets. Lemma 7. If the quasi-generalized Souslin operation S_N is δ -multiplicative, it is normal in the sense that $S_N\{S_N\{R\}\} = S_N\{R\}$ for every family R of sets. The paper closes with applications to a problem of Sélivanowski and a theorem of Kantorovitch and Livenson. *Blumberg.*

Ruziewicz, Stanislaw: Généralisation de quelques théorèmes équivalents à l'hypothèse du continu. C. R. Soc. Sci. Varsovie 30, 18—24 (1937).

The theorems in question are various propositions in Sierpinski's "Hypothèse du continu" (Warsaw 1934), namely P_1 (p. 9), P_2 (p. 11), P_6 (p. 23), P_8 (p. 25) and P_{8a} (p. 28), and the theorem P in the author's note "Sur une proposition équivalente à l'hypothèse du continu" [C. R. Soc. Sci. Varsovie 27, 101 (1935); this Zbl. 11, 340]. The present note extends these propositions to analogous theorems on infinite sets of arbitrary cardinal in a way that requires no essential changes in the proofs. Sample results are: Q_1 (analogue of P_1): If M is an infinite set of cardinal m , the inequality $m \leq n$ is a necessary and sufficient condition that the combinatory product $M \times M$ be a sum of 2 sets of cardinal $< n$ on every parallel to the axis of abscissas, of ordinates respectively. Q_3 (analogue of P_3): A necessary and sufficient condition that an in-

finite set M of cardinal m be a sum of increasing sets of cardinal $< n$ is that $m \leq n$. Q (analogue of P): A necessary and sufficient condition that an infinite set of cardinal m contain a family of subsets of cardinal $< n$ such that every sum of n sets of the family equals M is that $m \leq n$.
Blumberg (Columbus).

Ruziewicz, Stanislaw: Une généralisation d'un théorème de M. Sierpiński. Publ. Math. Univ. Belgrade 5, 23—27 (1936).

The theorem of the title is the one which asserts that the continuum hypothesis is equivalent to the proposition that there exists a decomposition of the plane into 2 sets at most denumerable on every parallel to the axis of abscissas, of ordinates respectively. The generalization of the author is as follows: If M is an infinite set of cardinal m , a necessary and sufficient condition that the combinatory product $M \times M$ be decomposable into 2 sets of cardinal $< n$ on every parallel to the axis of abscissas, of ordinates respectively is that $m \leq n$; by a parallel to the axis of abscissas is here understood a set of pairs (m, a) , where a is a fixed element of M , m a variable element ranging over M , and similarly for a parallel to the axis of ordinates. This generalization is then somewhat strengthened, and stated in terms of the notion of curve $y = f(x)$ in $M \times M$. A related result is then deduced in the theory of relations. Use is made in the proof of the method of Sierpiński.
Blumberg (Columbus).

Piccard, Sophie: Solution du problème de M. Ruziewicz de la théorie des relations pour les nombres cardinaux $m < \aleph_\alpha$. C. R. Soc. Sci. Varsovie 30, 12—18 (1937).

The problem in question is as follows: If E is an infinite set of cardinal m , n a cardinal $< m$, and R a binary relation among the elements of E such that, for every element x of E , there exist fewer than n elements y of E for which xRy , does there necessarily exist a subset H of E of cardinal m such that no pair of distinct elements of H stand in relation R ? The present note shows that the answer is in the affirmative for $m < \aleph_\alpha$. The author showed previously (Fundam. Math. 29; this Zbl. 17, 156) that the answer is affirmative for m regular, and this latter property is used in the proof of the new result.
Blumberg (Columbus).

Szpilrajn, Edward: Remarques sur les ensembles plans fermés. Fundam. Math. 29, 304—306 (1937).

For any subset E of the unit square I^2 , the author denotes by $D(E, \xi)$ the intersection of E with the line $x = \xi$ and by $D(E)$ the family of all non-vacuous sets $D(E, \xi)$. The problem of characterizing the families $D(F)$ for closed subsets F of I^2 is considered. It is shown that $D(F)$ is an analytic subset of the space 2^I of all closed subsets of the unit interval I . Furthermore, if A is any analytic subset of 2^I , there exists a closed set F in I^2 and a countable subset B of 2^I such that $D(F) = A + B$; and there exists a G_δ -set H in 2^I such that $D(F) \neq H + S$ for every closed set F in I^2 and every finite or vacuous family S in 2^I . The relation of these theorems to certain known results concerning semi-continuous functions and semi-continuous decompositions is discussed.
Whyburn (Virginia).

Sierpiński, W.: Sur la non-existence d'opération universelle pour les ensembles dénombrables. Fundam. Math. 29, 9—11 (1937).

If O is an operation defined in the countable set E there is always an operator defined in the set N of all the natural numbers which for some countable subset of E fails to be isomorphic to O in this subset.
E. W. Chittenden.

Gleyzal, André: Linear orders. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 23, 291—292 (1937).

A abstract without proofs, concerned with the iteration and decomposition of order types. The principal result states that any type A of linear order has a minimal iterative property a^* implied by an arbitrary property a , or is the sum of orders with this property over an order, no proper segment of which has the property a^* . In particular, every order A is either scattered (contains no dense sub-order) or the sum of scattered orders over a dense order.
E. W. Chittenden (Iowa/U.S.A.).

Braun, Stefania: Sur l'équation fonctionnelle $g(x) = f\varphi(x)$. Fundam. Math. 28, 294—302 (1936).

The article is concerned with the functional equation (1) $g = fh(x)$ between real functions. The existence of the function $h(x)$ for given f and g is equivalent to the condition (s) $g(E) \subset f(E)$, where E is the class of real numbers. If the condition (s) is satisfied, f and g are continuous, and (2) the set $E_x[f(x) = y]$ is [for every y in $f(E)$] bounded below, (3) there is no sequence of real numbers x_k converging to positive (negative) infinity such that if $f(x_k)$ converges to a number of $f(E)$ the function $\inf E_x[f(x) = y]$ ($\sup E_x[f(x) = y]$) defined for all y in $f(E)$ is lower (upper) semi-continuous on that set, then there is a function h satisfying (1) which is lower (upper) semi-continuous. There are two continuous functions f, g , satisfying (s) for which there is no continuous function h satisfying equation (1). If the condition (s) is satisfied, f is continuous, and g is of class $\leq \alpha$ of Baire, there is a solution h of (1) of class $\leq \alpha + 1$. There is a continuous function g and an upper (lower) semi-continuous function f such that $f(E) = E$ for which (1) is not satisfied by any function h entering the classification of Baire. A similar result holds for Lebesgue measurable functions. E. W. Chittenden.

Andreoli, G.: Sull'iterazione delle funzioni monotone. Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend., IV. s. 7, 10—18 (1937).

Recherches de caractère assez élémentaire sur l'itération des fonctions monotones d'une variable réelle (points attractifs et forme de la fonction limite des fonctions itérées successives). E. Blanc (Toulon).

Ward, A. J.: On Jordan curves possessing a tangent everywhere. Fundam. Math. 28, 280—288 (1936).

In response to a question of Fréchet: if a Jordan curve possesses a tangent everywhere, is it always possible to choose a parameter t so that the t -derivatives of the coordinates x, y, z , of a point on the curve exist and are not all zero (a) everywhere, (b) almost everywhere? — it is shown that the answer to (a) is negative, even for rectifiable curves, and that the answer to (b) is negative. E. W. Chittenden.

Analysis.

● Lorentz, H. A., G. Joos und Th. Kaluza: Höhere Mathematik für den Praktiker. An Stelle einer 5. Aufl. des Lehrbuchs der Differential- und Integralrechnung. Von H. A. Lorentz. Leipzig: Johann Ambrosius Barth 1938. XII, 364 S. u. 82 Abb. RM. 23.—

Die neue Bearbeitung bewahrt den Charakter des Werkes, das versucht, in möglichst gedrangter Form (und selbstverständlich ohne Eingehen auf die tiefere Problematik) das benötigte mathematische Rüstzeug zu entwickeln, wobei aus Raumgründen bewußt darauf verzichtet wird, die Theorie mehr als üblich an Hand von konkreten Beispielen zu entwickeln oder zu veranschaulichen. Behandelt wird das Gesamtgebiet der Infinitesimalrechnung, der Differentialgleichungen und der analytischen Geometrie. Der Stoff wurde überall geglättet und ergänzt; hinzugefügt wurden insbesondere Abschnitte über Kombinatorik, Vektorfelder und Integralumformungen sowie über die Elemente der Variationsrechnung. Ferner merkt man eine stärkere Berücksichtigung numerischer Verfahren. Von den Bedürfnissen der in Frage kommenden Praktiker dürften diejenigen der Physiker am meisten, und etwa die der Biologen am wenigsten berücksichtigt sein. W. Feller (Stockholm).

Approximation von Funktionen, Orthogonalentwicklungen:

Günther, N.: Sur la théorie de fermeture. Rend. Circ. mat. Palermo 60, 213—223 (1936).

Feldheim, Ervin: Sur l'orthogonalité des fonctions fondamentales, et sur la forte convergence en moyenne des polynomes d'interpolation de Lagrange dans le cas des abscisses de Tchebychef. Bull. Soc. Math. France 65, 1—40 (1937).

The paper gives a detailed investigation of the fundamental polynomials of the Lagrange interpolation

$$l_k^{(n)}(x) = l_k^{(n)}(\cos \theta) = (-1)^{k+1} \frac{\sin \theta_k^{(n)}}{n} \frac{\cos n\theta}{\cos \theta - \cos \theta_k^{(n)}}, \quad \theta_k^{(n)} = (2k-1) \frac{\pi}{2n},$$

associated with the zeros of the Tchebycheff polynomial $\cos n\theta$, $x = \cos\theta$. A special attention is devoted to the constants

$$\int_{-1}^{+1} l_{k_1}^{(n)}(x) l_{k_2}^{(n)}(x) \dots l_{k_m}^{(n)}(x) (1-x^2)^{-1/2} dx,$$

which are calculated in special cases partly in the exact, partly in the asymptotic sense. They vanish if $k_r \neq k_{\mu_1}^m$ even; this theorem, announced in an earlier Comptes Rendus Note (see this Zbl. 15, 63), is proved. On this basis a proof for a joint result of the author with Erdős (see this Zbl. 15, 252) is given, concerning the strong convergence

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^{+1} \{f(x) - L_n(x)\}^{2r} dx = 0, \quad r \text{ arbitrary positive integer,}$$

of the Lagrange interpolation polynomials $L_n(x)$, with $l_k^{(n)}(x)$ as fundamental polynomials, provided $f(x)$ is continuous. Finally the fundamental polynomials of the first and second kind of the Hermite interpolation (associated with the same interpolation points as before) are discussed from similar points of view. *G. Szegő.*

Sewell, W. E.: Degree of approximation by polynomials—problem α . Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 23, 491—493 (1937).

Let C be a Jordan curve in the complex z -plane satisfying the following conditions: A parameter representation $z = z(\theta)$ of C exists such that $z'(\theta) \neq 0$ and $z''(\theta)$ fulfils a Lipschitz condition of order $\delta > 0$. Let $f(z)$ be analytic in the interior of C , and let $f^{(p)}(z)$ be continuous on C , satisfying there the Lipschitz condition

$$|f^{(p)}(z_1) - f^{(p)}(z_2)| < A |z_1 - z_2|^\alpha,$$

$A > 0$, $0 < \alpha \leq 1$, z_1 and z_2 on C . The author indicates the existence proof for a sequence $\{p_n(z)\}$ of polynomials of the respective degree n such that

$$f(z) - p_n(z) = O\left\{\left(\frac{\log n}{n}\right)^\alpha\right\},$$

uniformly on C . The proof is based on certain properties of the level curves defined by the conformal mapping of the exterior of C ; it makes use of a result of Martschenko [Inst. Math. Stekloff 12, 289 (1934)]. Similar results hold for the approximation of the derivatives of $f(z)$. *G. Szegő (St. Louis, Mo.).*

Reihen:

● Karamata, J.: Sur les théorèmes inverses des procédés de sommabilité. (Actualités scient. et industr. Nr. 450. La théorie des fonctions. Exposés publiés par Paul Montel. VI.) Paris: Hermann & Cie. 1937. 47 pag. Frs. 12.—

The general theory of Tauberian theorems is reviewed from a standpoint similar to that adopted in recent papers by the author (see in particular this Zbl. 16, 250). A bibliography is included, and the reader is referred to the original sources for proofs of the deeper theorems. The general theory is illustrated in relation to a great variety of special methods of summation. *Ingham (Cambridge).*

Kawata, Tatsuo: A gap theorem for the Fourier series of an almost periodic function. Tôhoku Math. J. 43, 274—276 (1937).

Proofs of the following theorems: I. If $f(x)$ is S^2 . a. p. and its Fourier exponents $\lambda_n < 0$, then $f(x) \sim 0$ for $a < x < b$ implies $f(x) \sim 0$ for all x . II. If $f(x)$ is S^2 . a. p. and $\lim_{\lambda_n \rightarrow +\infty} |\lambda_n - \lambda_m| = \infty$, where λ_m is the λ nearest to λ_n , then $f(x) \sim 0$ for $a < x < b$ implies $f(x) \sim 0$ for all x . *E. Hille (New Haven, Conn.).*

Minakshisundaram, S.: On the extension of a theorem of Caratheodory in the theory of Fourier series. J. Indian Math. Soc., N. s. 2, 314—320 (1937).

Let $r \geq 1$, and let $f_1(x), f_2(x), \dots$ be a sequence of functions of period 2π , belonging to the class L^r and tending in the mean to a function F of L^r , that is

$\int_0^{2\pi} |F - f_k|^r dx \rightarrow 0$. Let $\sigma_n(x, f_k)$ denote the first arithmetic means of the Fourier series of f_k , that is $\sigma_n(x, f_k) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{\nu=1}^n \left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right) (a_\nu^{(k)} \cos \nu x + b_\nu^{(k)} \sin \nu x)$, and let $\chi_n^{(k)} = \left(\int_0^{2\pi} |f_k(x) - \sigma_n(x, f_k)|^r dx \right)^{1/r}$. If $a_n^{(k)} \rightarrow A_n$, $b_n^{(k)} \rightarrow B_n$ for k tending to ∞ , and every fixed n , then a necessary and sufficient condition that $\{A_n, B_n\}$ be the Fourier coefficients $F(x)$, is that $\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n^{(k)} = 0$. A. Zygmund (Wilno).

Minakshisundaram, S.: The Fourier series of a sequence of functions. J. Indian Math. Soc., N. s. 2, 321–323 (1937).

The author is concerned with a problem similar to that discussed in the preceding paper, but instead of the arithmetic means $\sigma_n(x, f_k)$, the partial sums $s_n(x, f_k)$ of the Fourier series of f_k are considered. A. Zygmund (Wilno).

Toscano, Letterio: Una trasformazione di Pincherle e somma di alcune serie numeriche. An. Fac. Ci. Pôrto 22, 29–41 (1937).

Consider the two power series, with radius of convergence >0 ,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \kappa_n x^n$$

Apply Pincherle's transformation

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Delta^\nu a_0}{\nu!} x^\nu \varphi^{(\nu)}(x).$$

The present Note makes use of this transformation in the special case where $a_n = p(n)$, polynomial in n , and $\kappa_n = 1, \frac{1}{n!}$; more particularly, $p(n) = n(n+\mu)(n+2\mu)\dots(n+r-1\mu)$, or $p(n)$ = Stirling's Number of first or second kind. — Thus, if $p(n)$ is a polynomial of degree r ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n = \frac{1}{(1-x)^{r+1}} \cdot \sum_{\nu=0}^r \Delta^\nu p(0) x^\nu (1-x)^{r-\nu},$$

and the right side can be developed in a power series. — The results thus derived yield the sum of certain numerical series involving the aforesaid Stirling's Numbers.

J. Shohat (Philadelphia).

Spezielle Funktionen:

Watson, G. N.: Studio di una particolare funzione definita da un integrale improprio. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 26, 91–96 (1937).

The object of this Note is to derive formulae for evaluating the improper integral

$$\varphi(\lambda) = \int_0^{\infty} (x + \tfrac{1}{2} - \sqrt{x^2 + x}) \sin \lambda x dx \quad (1)$$

for large and small values of λ . Using properly chosen contour — integration in the complex plane the author gets:

$$\varphi(2\lambda) = R \left[\int_0^{\infty} e^{-2\lambda y} \left(\tfrac{1}{2} - e^{\pi i/4} \sqrt{y + iy^2} \right) dy \right], \quad (2)$$

which readily yields an expression of $\varphi(2\lambda)$ in terms of the classical Bessel and Weber Functions:

$$\varphi(2\lambda) = \frac{1}{4\lambda} + \frac{\pi}{8\lambda} \{J_1(\lambda) \cos \lambda + Y_1(\lambda) \sin \lambda\}. \quad (3)$$

Applying to (3) the known expansions for the functions J_1, Y_1 , we obtain the desired expansions of $\varphi(2\lambda)$ in series of positive and negative powers of λ . (2) further yields the following property of $\varphi(\lambda)$: $(-1)^n \frac{d^n \varphi(2\lambda)}{d\lambda^n} \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots$).

J. Shohat (Philadelphia).

Condon, E. U., and Robert Greenwood: A new approach to the Hermite polynomials. *Philos. Mag.*, VII. s. 24, 281—287 (1937).

This approach to the Hermite polynomials is based on the consideration of two operators ξ , η satisfying the condition $\xi\eta - \eta\xi = -i$. One of their realization is the following: $\xi = -i \frac{df}{dx}$, $\eta = xf$. The problem $(\xi^2 + \eta^2)\psi = A\psi$, A constant, leads in a very simple manner to $\psi = \psi_n(x) = e^{x^2/2} (d/dx)^n e^{-x^2}$, $A = 2n + 1$, i.e. to the Hermite polynomials. Herefrom various properties of these functions can be derived. This leads to the representation

$$\psi_n(x) = \left(\frac{d}{dx} - x\right)^n e^{-x^2/2}.$$

Generalizations of these operations are also considered. *G. Szegő* (St. Louis, Mo.).

Koschmieder, Lothar: Eine Erzeugende der Hermiteschen Polynome, deren Grundgebiet die Ebene ist. *Math. Z.* 43, 248—254 (1937).

Mehler's formula for the generating function of $H_n(x)H_n(X)$ is extended to the Hermite polynomials of two variables

$$H_{mn}(x, y) = \exp\{\varphi(x, y)\} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} \exp\{-\varphi(x, y)\},$$

where φ is a given binary quadratic form. The generating function

$$\sum \frac{s^m}{m!} \frac{t^n}{n!} H_{mn}(x, y) H_{mn}(X, Y)$$

is represented in terms of elementary functions. This series is convergent in a domain of the s, t -plane bounded by four hyperbola arcs. The method is based on an idea used by Hardy for the proof of the ordinary Mehler formula. *G. Szegő*.

Shabde, N. G.: On some Legendre function formulae. *Tôhoku Math. J.* 43, 155—159 (1937).

Expansion of $Q_{\nu}^{-m-1/2}(\cosh \alpha) Q_{\nu}^{-m-1/2}(\cosh \beta)$ and $P_{\mu-1/2}^{-\nu}(\cosh \alpha) Q_{\mu-1/2}^{-\nu}(\cosh \beta)$ in terms of $Q_{\nu}^{-r-1/2}\{\cosh(\alpha + \beta)\}$, $r = 0, 1, \dots, m$, and $Q_{\mu-1/2}^{\nu+2n}(\cosh \alpha \cosh \beta)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, respectively, is given. Both formulas are based on certain results of Bailey. Finally some definite integrals involving P_n and Q_n are calculated.

G. Szegő (St. Louis, Mo.).

Gormley, P. G.: The zeros of Legendre functions. *Proc. Roy. Irish Acad. A* 44, 29—43 (1937).

Let $E(x)$ be the integer next less than x , or zero if $x \leq 1$. Then if the real axis in the complex z -plane has a cut from 1 to $-\infty$ and $n \geq -\frac{1}{2}$, $Q_n^m(z)$ has $2E(\frac{1}{2}|m| - \frac{1}{2}n)$ zeros which all lie on the imaginary axis. If $n < -\frac{1}{2}$ and $m \geq 0$, $Q_n^m(z)$ has $2|E(\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}n) + E(-\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}n) - E(-n - \frac{1}{2})|$ zeros on the imaginary axis except when $n + \frac{1}{2}$ is a negative integer, when the number is $2E(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2})$, or if $n \pm m$ is an even integer, and $n + m + 1 < 0$, when there is no zero. The number of zeros of $Q_n^m(z)$ for which $z > 1$ is k , equal to 0 or 1, where $k + E(-n - |m|) + E(-n - \frac{1}{2})$ is even, unless $n + \frac{1}{2}$ is a negative integer when $k = 0$. The function $Q_n^m(x)$, in which $m \geq 0$, $n \geq \frac{1}{2}$, has $E(n + \frac{1}{2}) - E(m + \frac{1}{2}) + 1$ zeros for which $-1 < x < 1$ if $n - m + 1 \geq 0$, and if $n - m + 1 < 0$, the number is $k = 0$ or 1, where $k + E(n + \frac{1}{2}) + E(m + \frac{1}{2}) + 1$ is even. If N_1 and N_2 denote the numbers of zeros of $Q_n^m(x)$ and $Q_{n-1}^m(x)$ respectively in this interval, then $N_1 + N_2 = 2E(n - m + 1)$, unless either $n + \frac{1}{2}$ or $m + \frac{1}{2}$ is integral, when $N_1 = N_2 = E(n - m + 1)$. The function $Q_n^{-m}(x)$ has $E(n - m + \frac{3}{2}) + E(m - n - \frac{1}{2}) - 2E(\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2})$ zeros in $(-1, 1)$; $Q_{n-1}^{-m}(x)$ has $E(n - m + 1) + k$ zeros in the same interval, where $E(n - m + 1) + E(n + m + \frac{1}{2}) + k$ is even, except when $n + m + \frac{1}{2}$ is an integer, in which case the number is $E(n - m + 1)$. — The complex zeros of $Q_n^m(z)$ are also discussed and the results are collected in a table. — Some theorems are given also for the real and complex roots of $P_n^m(x)$ and $P_n^{-m}(z)$ respectively, some results being deduced with the aid of

reciprocal relations connecting the two types of Legendre function. In the first part of the paper use is made of Klein's theorem relating to the real zeros of $F(a, b; c; x)$.

H. Bateman (Pasadena).

Differentialgleichungen, allgemeine Theorie:

Cherry, T. M.: Topological properties of the solutions of ordinary differential equations. Amer. J. Math. 59, 957—982 (1937).

This paper is concerned with the descriptive properties of the sets defined by bounded solutions of a dynamical system (system of first order ordinary differential equations). If (P) denotes the motion determined by the point P , let $L_\alpha(P)$ be the set of α -limit points (Birkhoff, Dynamical Systems, p. 197) of (P) , $L_\omega(P)$ the set of ω -limit points of (P) . New terminology is introduced by defining a motion as pervasive (otherwise known as stable in the sense of Poisson) if (P) belongs to both $L_\alpha(P)$ and $L_\omega(P)$; asymptotic if (P) belongs to neither $L_\alpha(P)$ nor $L_\omega(P)$; and pervasive-asymptotic in the remaining cases. Recurrent becomes uniformly pervasive. If (P) is pervasive, $L_\alpha(P) = L_\omega(P)$ and this set is called the associated stratum; if (P) is pervasive-asymptotic, one of the sets $L_\alpha(P)$, $L_\omega(P)$ is a proper subset of the other, and the containing set is called the stratum. As the author states, the principal theorems of the paper are modified derivations of known theorems due to Birkhoff (though attention should be called to the fact that a more recent paper of Hilmy (see this Zbl. 17, 136) than that cited by the author essentially anticipates Th. VI). — The motions of a stratum are classified according as they are completely transitive (with respect to the stratum), transitive in one sense only, or transitive in neither sense. Examples displaying the various types of behavior of these sets with regard to density are given, these examples consisting of the motions on two or three dimensional tori with one or more points of equilibrium. Hedlund (Bryn Mawr).

Kourensky, M.: L'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre à deux et plus de deux fonctions inconnues. I. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 23, 464—470 et 541—552 (1937).

Gegeben sei ein System von n linearen homogenen Gleichungen zwischen den ersten Ableitungen von n Funktionen z_1, \dots, z_n der m Veränderlichen x_1, \dots, x_m ; die Koeffizienten mögen von $x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_n$ abhängen. Die Idee des Verf. besteht darin, eine der gesuchten Integralrelationen $F_i(x_n, z_k) = 0$ als nach einer der unbekannten Funktionen z_k aufgelöst anzusehen; so gelingt es, das gegebene System auf ein analoges System von $n - 1$ Gleichungen mit $n - 1$ unbekannten Funktionen zurückzuführen. Man findet, wie bei der Methode von Hamburger, $(n - 1)(m - 2)$ algebraische Bedingungen zwischen den Koeffizienten, die für die vollständige Integration des Systems notwendig sind. Verf. gibt auch Beispiele, bei welchen seine Methode zum allgemeinen Integral des Gleichungssystems führt, während die Hamburgersche Methode nicht anwendbar wäre. G. Cimmino (Napoli).

Vranceanu, G.: La géométrisation des équations aux dérivées partielles du second ordre. J. Math. pures appl., IX. s. 16, 361—374 (1937).

On sait que, la théorie de l'équation du second ordre (1) $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ est étroitement liée au système de Pfaff: $dz - p dx - q dy = 0$, $dp - r dx - s dy = 0$, $dq - s dx - t dy = 0$, les r, s, t étant des fonctions de deux variables u, v et des x, y, z, p, q satisfaisant à l'équation (1). Dans le présent travail l'auteur considère le cas général où l'équation (1) est à caractéristiques distinctes et du second ordre. Dans ce cas l'équation (1) détermine une connexion affine complète opérant dans l'espace des variables x, y, z, p, q, u, v et les formules d'équivalence de deux équations telles que (1), par une transformation de contact, dépendent de 9 constantes arbitraires au plus. Les équations (1) qui admettent un groupe maximum de transformations en elles mêmes à 9 paramètres dépendent d'une constante arbitraire et elles correspondent d'une manière très simple aux cubiques planes de la famille suivante: $X^3 + [9m^4 : 8(1 + m^4)^2](X - 2Y)^2 = 0$. O. Borůvka (Brno).

Iglisch, Rudolf: Bemerkungen zur Riemannschen Integrationsmethode. Deutsche Math. 2, 551—573 (1937).

Die üblichen Randwertaufgaben für partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung vom hyperbolischen Typ in Normalform werden auf Volterrasche Integralgleichungen systematisch zurückgeführt. Bekannte Resultate bekommen in dieser Zusammenfassung einen einfacheren Beweis oder werden in einiger Weise verschärft. Nach Verf.s Ansicht sollte außerdem seine Theorie geeignet sein, den Heavisidekalkül unter einem neuen Gesichtswinkel zu sehen.

G. Cimmino (Napoli).

Gellerstedt, S.: Quelques problèmes mixtes pour l'équation $y^m z_{xx} + z_{yy} = 0$. Ark. Mat. Astron. Fys. 26 A, Nr 3, 1—32 (1937).

Die im Titel genannte Gleichung (m ungerade positive Zahl) wird in besonderen Gebieten untersucht, welche eine Strecke $A_1 A_2$ der x -Achse enthalten. Man sucht nach einer Lösung $z(x, y)$ mit vorgegebenen Werten auf dem in der elliptischen Halbebene $y = 0$ gelegten Randbogen und auf zwei Bögen der aus einem Punkt ausgehenden Charakteristiken in der hyperbolischen Halbebene $y < 0$. Gibt man dazu die Werte $v(x)$ von z_y auf der Strecke $A_1 A_2$, dann ist eine Lösung $z_1(x, y)$ im Teilgebiet oberhalb der x -Achse [Holmgren, Ark. Mat. Astron. Fys. 19 B, Nr 14 (1926)] sowie eine Lösung $z_2(x, y)$ im Teilgebiet unterhalb der x -Achse (Gellerstedt, dies. Zbl. 16, 212) eindeutig bestimmt. Schreibt man nun, daß z_1 und z_2 für $y = 0$ übereinstimmen [also eine einzige Lösung $z(x, y)$ im ganzen Gebiet bilden], so findet man eine singuläre Integralgleichung für $v(x, y)$, die sich, nach einem Carlemanschen Gedankengange, auf eine reguläre Fredholmsche Integralgleichung 2. Art zurückführen läßt. Die zahlreichen Arbeiten von M. Cibrario (dies. Zbl. 5, 160; 6, 203; 7, 306; 10, 22, 112; 14, 262), die sich mit analogen Fragen beschäftigt hat, sind nicht erwähnt. Cimmino.

Théodoresco, N.: Sur les solutions élémentaires des équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples. J. Math. pures appl., IX. s. 16, 329—343 (1937).

Verf. studiert eine lineare homogene Differentialgleichung 4. Ordnung in beliebig vielen Variablen unter der Voraussetzung, daß die Koeffizienten der Ableitungen 4. Ordnung mit den entsprechenden Koeffizienten des Quadrats einer quadratischen Form übereinstimmen. Er findet die Bedingung dafür, daß eine Lösung mit algebraischer Singularität existiert, und zeigt, wenn das der Fall ist, wie man zur Berechnung der Elementarlösung im Sinne Hadamards (dies. Zbl. 15, 349) gelangen kann.

G. Cimmino (Napoli).

Differential- und Integralgleichungen der mathematischen Physik, Potentialtheorie:

Lebesgue, Henri: Sur la méthode de Carl Neumann. II. J. Math. pures appl., IX. s. 16, 421—423 (1937).

Analyse du début dans ce Zbl. 17, 16. L'aut. indique ici une autre lacune du raisonnement de Neumann, lacune qui peut être comblée par l'emploi des intégrales de Lebesgue. Ensuite l'aut. énonce quelques relations entre le problème de Riemann (minimum d'intégrale) et le problème de Dirichlet, en indiquant les travaux originaux dus à Hadamard, à Lebesgue, à Zaremba et à Vasilescu. Liste d'errata relative au début du mémoire.

Georges Giraud (Bonny-sur-Loire).

Jacob, Calus: Sur le problème de Dirichlet à deux dimensions. C. R. Acad. Sci., Paris 205, 1201—1203 (1937).

Aux conditions classiques du problème de Dirichlet pour les fonctions harmoniques dans une aire $p + 1$ fois connexe, l'auteur ajoute que la fonction harmonique conjuguée doit avoir des périodes données par rapport à chacun des p contours intérieurs. Ce problème est compatible moyennant p relations linéaires, nécessaires et suffisantes, entre ces périodes. Annonce de généralisations.

Georges Giraud.

Colucci, A.: Teoremi e problemi sulle funzioni iperarmoniche trattati col metodo degli operatori lineari. Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend., IV. s. 7, 48—54 (1937).

Das Hauptresultat ist die Bestimmung aller n -hyperharmonischen Funktionen

(d. i. Lösungen von $\Delta^n u = 0$) in beliebig vielen Variablen, die nur vom Abstand des Aufpunktes von einem festen Pol abhängen. *G. Cimmino (Napoli).*

Colucci, A.: Sulla rappresentazione delle funzioni iperarmoniche a mezzo di armoniche. *Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend.*, IV. s. 7, 55—62 (1937).

Verf. beschäftigt sich mit dem Problem der Bestimmung der harmonischen Funktionen u_0, \dots, u_{n-1} , welche in der Almansischen Zerlegungsformel einer n -hyperharmonischen Funktion $u = u_0 + \rho^2 u_1 + \dots + \rho^{2n-2} u_{n-1}$ auftreten. Er gelangt zum Ziel vermittle der vorläufigen Inversion des von $T_\alpha u = \rho^{2-\alpha} \Delta(\rho^\alpha u)$ definierten Linearoperators. *G. Cimmino (Napoli).*

Kravtchenko, Julien: Problèmes de représentation conforme de Helmholtz; étude d'un cas limite dans la théorie du sillage en fluide parfait. *C. R. Acad. Sci., Paris* 205, 1203—1205 (1937).

Jacob, C.: Sulla biforcazione di una vena liquida dovuta a un ostacolo circolare. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. 24, 439—446 (1937).

On considère le mouvement plan, permanent et irrotationnel suivant: un courant de largeur finie, limité latéralement par deux lignes de flux le long desquelles il glisse contre du fluide au repos, rencontre un obstacle de forme circulaire; il se divise en deux et à l'arrière de l'obstacle se forme une région infinie de fluide au repos qui sépare les deux courants bifurqués; le mouvement est supposé doué d'un axe de symétrie. — L'auteur utilise la méthode classique de M. Levi-Civita; il démontre (s'appuyant sur un résultat de M. Leray) l'existence et l'unicité de la solution du problème aux limites qui s'introduit. Grâce à diverses inégalités qu'il établit l'auteur montre: 1° que pour un courant donné et un arc de cercle donné il existe une seule solution du problème de sillage; 2° que pour un courant donné et un obstacle circulaire donné il existe une seule solution du problème de la proue. L'auteur étudie enfin le comportement de la solution quand la largeur du courant croît au delà de toute limite. *Berker.*

Agostinelli, C.: Risoluzione mediante integrali definiti dell'equazione differenziale $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} = f$, e problema analogo a quello di Dirichlet per un campo emisferico. *I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. 26, 138—143 (1937).

Verf. bemerkt, daß die Gleichung des Titels die Grundlösung

$$[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{-\frac{1}{2}} \cdot [(x + x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{-\frac{1}{2}}$$

besitzt und daß sich eine Lösung der adjungierten Gleichung aus jeder Lösung der gegebenen Gleichung durch Multiplikation mit x gewinnen läßt. Er stellt dann die Greenschen Formeln auf und gibt den expliziten Ausdruck der Greenschen Funktion für den Fall der Halbkugel $x^2 + y^2 + z^2 \leq R$, $x \geq 0$. *G. Cimmino (Napoli).*

Smirnov, V.: Sur les solutions singulières de l'équation d'onde et des équations d'élasticité. *Publ. Inst. Seismol. Acad. Sci. URSS* Nr 78, 1—30 (1936).

Die elastodynamischen Grundgleichungen lassen sich allgemein mit Hilfe des Ansatzes

$$\bar{u} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \bar{\psi}$$

lösen, wobei \bar{u} der elastische Verschiebungsvektor ist, während φ ein skalares Potential darstellt und die Gleichung der Longitudinalwellen

$$a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \Delta \varphi$$

erfüllt (t = Zeit, $1/a$ = Fortschrittgsgeschwindigkeit der Longitudinalwellen, Δ = Laplacescher Operator). ψ genügt der Differentialgleichung der Transversalwellen

$$b^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \Delta \psi,$$

wobei $1/b$ die Fortschrittgsgeschwindigkeit der Transversalwellen angibt. — Für den Sonderfall der Achsensymmetrie (Zylinderkoordinaten mit der z -Achse als Umdrehungsachse, $x^2 + y^2 = \rho^2$, $y/x = \text{tg } \vartheta$) werden zunächst die Lösungen der Wellen-

gleichung vom Grade Null aufgesucht, d. h. die nur von den Veränderlichen $\xi = \varrho/t$, $\eta = z/t$ abhängen; dabei werden Integraldarstellungen unter Verwendung komplexer Funktionen herangezogen. Die gesuchten Funktionen lassen sich dann durch Legendresche Polynome ausdrücken. In gleicher Weise werden auch die Lösungen vom Grade (-1) , d. h. von der Form $(1/t) \cdot \omega(\xi, \eta)$, und schließlich auch allgemein jene vom Grade $(-k)$, d. h. von der Form $(1/t^k) \cdot \omega(\xi, \eta)$, behandelt und auf Legendresche Polynome zurückgeführt. Für negative Werte des Exponenten k lassen sich die Lösungen hieraus durch Integration nach η herstellen. Weitere Lösungen werden durch Differentiation nach z hergestellt. Schließlich werden für einige Beispiele auch die Verschiebungs- und Spannungskomponenten angegeben. *H. Neuber* (München).

Mindlin, J. A.: The boundary dynamic problem of the theory of elasticity for a circle with a given tension. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 15, 531—534 (1937).

Mindlin, J. A.: The boundary dynamic problem of the theory of elasticity for a circle with given displacements. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 16, 15—18 (1937).

Behandelt wird das Problem der Schwingungen der Kreisscheibe, wenn längs des Randes die Spannungen in der Form

$$(\widehat{r\tau})_{r=R} = \varrho \alpha_\nu(t) e^{i\nu\vartheta}, \quad (\widehat{r\vartheta})_{r=R} = \varrho \beta_\nu(t) e^{i\nu\vartheta}$$

vorgegeben sind, wobei ν eine ganze Zahl oder 0 und ϱ die Dichte bedeuten soll. Die Anfangsbedingungen entsprechen der Ruhelage. Für die Verschiebungen wird ein Ansatz von der Form

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}, \quad u_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

gemacht, wobei φ bzw. ψ den Gleichungen

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \Delta \varphi, \quad \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \Delta \psi$$

genügt und φ und ψ in einfacher Weise mit den Materialkonstanten zusammenhängen. Für die gesuchten Funktionen φ und ψ wird ein allgemeiner, von Whittaker herführender Ansatz

$$\varphi_n = \int_0^{2\pi} f_n(x \cos \lambda + y \sin \lambda + at) e^{in\lambda} d\lambda, \quad \psi_n = \int_0^{2\pi} F(x \cos \lambda + y \sin \lambda + bt) e^{in\lambda} d\lambda$$

ausgenutzt. Für die Funktionen φ und ψ ergeben sich dann Integralgleichungen, die nach Durchführung einer geeigneten Substitution in Integralgleichungen vom Volterraschen Typus umgeformt werden. Diese werden dann unter Anwendung der Laplaceschen Transformation gelöst. *Funk* (Prag).

Pogorzelski, Witold: Problème de Fourier pour une couche hétérogène et rayonnante. Ann. Acad. Sci. Techn., Varsovie 3, 17—27 (1936).

The case of a layer without radiation is first considered, the temperature T being then a solution of the equation $\kappa T_{xx} + \kappa_x T_x = c \varrho T_t$ in which κ , c and ϱ are known continuous functions of x . By putting $T = U + u$ and introducing a new dependent variable s which is a suitable function of x , the equation for U is $U_{ss} - U_t = p U_s + q$ where $q = pu_s$ and u is the solution of $u_{ss} = u_t$ which satisfies the end conditions $u \rightarrow f_1(t)$ when $s \rightarrow 0$, $u \rightarrow f_2(t)$ when $s \rightarrow b$. By using the method of Holmgren, as developed by Levin and Gevrey, this problem is reduced to the solution of an integro-differential equation in which the kernel is a type of Green's function. The more general problem of a radiating layer in which use is made of Kirchhoff's law and Planck's theory of the radiation of heat also can be treated by the same type of analysis and leads to an integro-differential equation which is treated by the method of successive approximations. In the proof of the convergence of the process use is made of two properties of the Green's function established by Gevrey. *H. Bateman* (Pasadena).

Sakurai, Tokio: On the singularities of function in the operational methods. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 19, 897—921 (1937).

Carson, John R., and Thornton C. Fry: Variable frequency electric circuit theory with application to the theory of frequency-modulation. Bell Syst. techn. J. 16, 513—540 (1937).

Das Verhalten linearer elektrischer Kreise wird für frequenzmodulierte Schwingungen untersucht. Die Störungsfunktion des entsprechenden Systems linearer Differentialgleichungen ist $f(t) = \exp\left(i \int_0^t \Omega dt\right)$, wobei die Momentanfrequenz in der Form

$\Omega = \omega_c + \mu(t) \equiv \omega_c + \lambda s(t)$ mit $\frac{\lambda}{\omega_c} \ll 1$ geschrieben wird und über die Zeitfunktion $s(t)$ folgende Annahmen gemacht werden: Quadratischer Mittelwert $\overline{s^2} = \frac{1}{2}$, Mittelwert $\overline{s} = 0$, Existenz aller Ableitungen und größenordnungsmäßige Beschränktheit der Schwankung: Das Fourierspektrum von $s(t)$ soll absolut im wesentlichen unterhalb ω_a liegen, d. h. es soll für $\omega \gg \omega_a$ eine genügend stark abnehmende Majorante existieren, wobei $\left(\frac{\omega_a}{\lambda}\right)^2 \ll 1$. Bedeutet $Y(p)$ die charakteristische Funktion (Admittanz) des Systems, d. h. gilt asymptotisch für große t und für $\lambda = 0$: $Y(i\omega_c) \cdot \exp(i\omega_c t)$, so kann man das allgemeine Ergebnis in der analogen Form $Y(i\omega_c; t) \exp\left(i \int_0^t \Omega dt\right)$ schreiben mit

$$\frac{Y(i\omega_c; t)}{Y(i\omega_c)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} i^n \vartheta_n C_n(t) \quad \text{mit} \quad \vartheta_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{1}{Y} \frac{d^n Y}{dp^n} \right]_{p=i\omega_c}$$

und

$$C_n(t) = \left[\mu(t) - i \frac{d}{dt} \right]^{n-1} \mu(t) \quad \text{und} \quad \frac{Y(i\omega_c; t)}{Y(i\Omega)} = 1 + \sum_{\varrho=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\sigma=1}^{\infty} i^{\sigma} f_{\varrho\sigma} \vartheta_{\varrho+\sigma}^* \right\}$$

mit

$$\vartheta_n^* = \frac{1}{n!} \left[\frac{1}{Y} \frac{d^n Y}{dp^n} \right]_{i\Omega} \quad \text{und} \quad f_{\varrho\sigma} = (\varrho + \sigma)! \cdot \sum_{\substack{u_r, v_r \\ \sum_{r=1}^{\eta} u_r v_r = \varrho; \sum_{r=1}^{\eta} v_r = \sigma}} \prod_{r=1}^{\eta} \frac{[\mu(u_r)]^{v_r}}{v_r! [(u_r + 1)!]^{v_r}}.$$

Da $Y(p)$ i. allg. eine rationale, für $\text{Re}(p) > 0$ reguläre Funktion ist, divergieren diese formalen Entwicklungen, haben aber im praktisch interessierenden Fall, daß Y bei $i\omega_c$ nicht stark von der Linearität abweicht, semikonvergenten Charakter; die Restglieder lassen sich, wenn die erwähnte Majorante gegeben ist, mittels des Fourierintegrals abschätzen. Ist die charakteristische Funktion im wesentlichen Frequenzgebiet $|\omega - \omega_c| \lesssim \lambda$ genügend genau linear: $Y \approx Y(i\omega_c) \left\{ 1 + \frac{\omega - \omega_c}{\omega_1} \right\}$, so erhält man,

falls ω_1 nahezu reell und $\left(\frac{\lambda}{\omega_1}\right)^2 \ll 1$ ist, $\left[1 + \frac{\lambda}{\omega_1} s(t) \right] \exp\left(i \int_0^t \Omega dt\right)$. Von besonderem

Interesse ist hier die Amplitudenfunktion $[\omega_1 + \lambda s(t)]$: Man erhält die Frequenzmodulation reproduziert als Amplitudenmodulation. Betrachtet man zwei Systeme, für die $\text{Im}\{Y_1(i\omega_c) + Y_2(i\omega_c)\} = 0$, $\text{Re}\{Y'_1(i\omega_c) - Y'_2(i\omega_c)\} = 0$ (die also bei ω_c in „Resonanz“ zueinander sind), so ergibt sich als ihr Differenz-Amplitudeneffekt $2 \frac{\lambda}{\omega_1} s(t)$, d. h. Verdoppelung und Unterdrückung der Trägerfrequenz (des konstanten Terms) ω_c .

— Es wird dann die allgemeinere Voraussetzung gemacht, daß $f(t)$ neben $\exp\left(i \int_0^t \Omega dt\right)$ noch ein „statistisches“ Glied $\sigma(t)$ enthält, dessen Spektrum in der Umgebung von ω_c den quadratischen Mittelwert N^2 pro Frequenzeinheit habe; es wird nichts weiter vorausgesetzt, als daß die höheren Potenzen des statistischen Amplitudenquadrats $\omega_a N^2$ für das Hauptfrequenzgebiet ω_a des Vorgangs $s(t)$ vernachlässigbar gegen 1 sind. Gefragt ist nach dem Verhältnis der mittleren Amplitudenquadrate v des zweiten zum ersten Anteil „hinter“ dem System $Y(p)$, wobei aber nur das Frequenzgebiet

von 0 bis ω_a berücksichtigt wird (elektrisch: ein ideales Tiefpaßfilter mit der Grenzfrequenz ω_a zwischengeschaltet gedacht wird). Das Ergebnis ist $v \approx 2 \left(\frac{\omega_1}{\lambda} \right)^2 \omega_a N^2 \gg \omega_a N^2$ und bei Trägerunterdrückung $v \approx \omega_a N^2$, d. h. im letzteren Fall gleich dem entsprechenden Verhältnis zwischen den Anteilen von $f(t)$. Dieselbe Rechnung wird für die neue Störungsfunktion $f^*(t) = f(t)$ für $|f(t)| \leq \eta$, $f^*(t) = +\eta$ bzw. $-\eta$ für $f(t) \geq \eta$ bzw. $\leq -\eta$ mit $\eta \ll 1$ durchgeführt, die einer drastischen Amplitudenbeschränkung von $f(t)$ entspricht (und auf elektrischem Wege durchführbar ist); hierbei bleiben die Nulldurchgänge (Phasenverhältnisse) erhalten. Man erhält dann mit $s^2 = \frac{1}{2} : v \approx \frac{2}{3} \left(\frac{\omega_a}{\lambda} \right)^2 \ll 1$.

Baerwald (London).

Integralgleichungen, Integraltransformationen:

Miranda, C.: Su di una classe di equazioni integrali il cui nucleo è funzione del parametro. Rend. Circ. mat. Palermo **60**, 286—304 (1936).

The integral equation considered is:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_T G(x, y, \lambda) \varphi(y) dy$$

where

$$G(x, y, \lambda) = K(x, y) + \sum_{i=1}^p \frac{\lambda}{\lambda + a_i} H_i(x, y)$$

$K(x, y)$ and $H_i(x, y)$ are real, symmetric and of L^2 on $T^{(2)}$, $H_i(x, y)$ are semi-definite, positive, and of finite order, the a_i are positive and not characteristic values of

$$G_i(x, y) = K(x, y) - \sum_{j \neq i} \frac{a_i}{a_j - a_i} H_j(x, y)$$

and φ and f are of L^2 on T . For such kernels, most of the Hilbert-Schmidt theory holds, i. e. the characteristic values are real and denumerable, with infinity as only limiting point, there always exist characteristic values and functions, $\int_T G(x, y, \lambda) f(y) dy$ is developable in terms of the characteristic functions in the form:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \left[\frac{1}{\lambda_k} \int_T \varphi_k(y) f(y) dy + \sum_{i=1}^p \frac{\lambda a_i}{(\lambda + a_i)(\lambda_k + a_i)} \int_T \int_T H_i(y, t) f(y) \varphi_k(t) dy dt \right]$$

from which a form for the solution of the integral equation is deducible. Hildebrandt.

Smithies, F.: The eigen-values and singular values of integral equations. Proc. London Math. Soc., II. s. **43**, 255—279 (1937).

The first part of the paper contains a discussion of integral equations with real (symmetric or non-symmetric) kernel $K(s, t)$ such that $\iint K^2(s, t) ds dt < \infty$. This follows essentially the lines of E. Schmidt but makes full use of the Lebesgue integral and of convergence in the mean. The second part is devoted to the distribution of the singular values (in the sense of E. Schmidt) of non-symmetric kernels and the bilinear formula for such kernels. Let $K_s^{(r)}(s, t)$ exist for $r = 1, 2, \dots, r-1$ as absolutely continuous functions of s for almost all t and let $K_s^{(r)}(s, t)$ as function of s belong to L_p for almost all t , $1 < p \leq 2$. Further let

$$\int_a^b \left\{ \int_a^b |K_s^{(r)}(s + \theta, t) - K_s^{(r)}(s - \theta, t)|^p ds \right\}^{2/p} dt \leq A |\theta|^{2\alpha},$$

where either $r > 0$, $\alpha > 0$ or $r = 0$, $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$. Then $\iint K^2(s, t) ds dt < \infty$, and $n^{r+\beta} \lambda_n = O(1)$, where λ_n is the n -th singular value and $\beta = \alpha + 1 - 1/p$. In case $K(s, t)$ is symmetric, the singular values are the characteristic values of the kernel and the result is an improvement of an estimate due to Hille and Tamarkin (this Zbl. **3**, 400; their estimate refers to characteristic values of kernels symmetric or not).

Under the same hypotheses the series

$$\sum \frac{1}{\lambda_n} \varphi_n(s) \psi_n(t)$$

converges to $K(s, t)$ almost everywhere and if either $r > 0$ or $r = 0$ and $\alpha > 1/p$ the convergence is absolute almost everywhere. Here $\varphi_n(s)$ and $\psi_n(t)$ are a pair of adjoint singular functions of $K(s, t)$ belonging to the singular value λ_n . *E. Hille*.

Smithies, F.: A note on completely continuous transformations. *Ann. of Math.*, II. s. 38, 626—630 (1937).

Let $p > 1$, $q > 1$, p' conjugate exponent of p , and put

$$\|K\| = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} ds \left[\int_{-\infty}^{\infty} |K(s, t)|^{p'} dt \right]^{q/p} \right\}^{1/q}.$$

If $\|K\| < \infty$, then the equation

$$g(s) = \int_{-\infty}^{\infty} K(s, t) f(t) dt$$

defines a completely continuous transformation from L_p to L_q . The case $p = q = 2$ is well known. Hille and Tamarkin (this Zbl. 9, 402) have proved the theorem for $p = q$. The same case ($p = q$) restricted to functions depending only upon the integral part of the coordinates (sequence-to-sequence transformation) has been treated by L. W. Cohen (this Zbl. 14, 118).

E. Hille (New Haven, Conn.).

Bremekamp, H.: Über die Carsonsche Integralgleichung. *Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc.* 40, 689—694 (1937).

The author is concerned with the integral inversion formula of the Laplace transformation. The note contains an elegant proof of Lerch's uniqueness theorem. The assumptions under which the inversion formula is proved are essentially those of Tamarkin, *Trans. Amer. Math. Soc.* 28, 418 (1926), though it is not clear to the reviewer how the author can dispense with the uniformity of the convergence (assumed by Tamarkin) in his condition 2. The proof is too sketchy at the critical point where this condition is used.

E. Hille (New Haven, Conn.).

Lévy, Paul: Sur certaines solutions de l'équation de Chapman. *C. R. Acad. Sci., Paris* 205, 1355—1357 (1937).

Um Verteilungsfunktionen $F(x, s, t)$ zu erhalten, die Lösungen von

$$F(x, s, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(y, s, u) dy F(x - y, u, t), \quad s < u < \bar{t}, \quad (1)$$

sind, setzt Verf. für $0 \leq x < 1$

$$\varphi(x, s, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \{F(x + n, s, t) - F(n, s, t)\} \quad (2)$$

und erhält die einfachere Gleichung

$$\varphi(x, s, t) = \int_0^1 \varphi(y, s, u) dy \varphi(x - y, u, t). \quad (3)$$

Es geht jedoch nicht jede Lösung von (3) durch eine Transformation (2) aus einer Lösung von (1) hervor. Verf. gibt Bedingungen hierfür an und untersucht ferner, wann zwei Lösungen von (1) zu derselben Lösung von (3) führen. *W. Feller*.

Lewitan, B.: On an integral equation with an almost periodic solution. *Bull. Amer. Math. Soc.* 43, 677—679 (1937).

Bezeichnet $e(x) * f(x)$ die zu $(-\infty, +\infty)$ gehörige Faltung $\int e(x - u) f(u) du$, wobei $e(x)$ von der Klasse $L(-\infty, +\infty)$ und $f(x)$ für $-\infty < x < +\infty$ gleichmäßig stetig und beschränkt ist, so kann man fragen, wann hat $e(x)$ die Eigenschaft, daß $f(x)$ im Bohrschen Sinne fastperiodisch sein muß, sobald dasselbe für $e(x) * f(x)$ zutrifft. Verf. gibt eine hinreichende Bedingung an, indem er einerseits annimmt, daß auch

$xe(x)$ zur Klasse $L(-\infty, +\infty)$ gehört und andererseits die reellen Nullstellen der Fouriertransformierten von $e(x)$ passenden Einschränkungen unterwirft. *Wintner*.

Tricomi, F.: Sulla formula d'inversione di Widder. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 25, 416—421 (1937).

The inversion formula of Widder (this Zbl. 8, 306) reads

$$F(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{t}\right)^{n+1} f^{(n)}\left(\frac{n}{t}\right),$$

when

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt.$$

The author considers three special cases and obtains the corresponding limit relations. In the first case $F(t) = \log t$ and the formula $\mathcal{P}(n) - \log n \rightarrow 0$ results. In the second case $F(t) = 0$ or 1 according as $t \leq \lambda$ or $> \lambda$. This leads back to Widder's own discontinuous factor involving the partial sums of the exponential series. (See loc. cit. p. 115; this formula was Widder's own point of departure.) The third case involves Bessel functions and Laguerre polynomials and leads to the relation

$$J_{\nu}(2\sqrt{x}) = x^{\nu/2} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\nu} L_n^{(\nu)}\left(\frac{x}{n}\right), \quad \nu > -1, x > 0.$$

(For the special case $\nu = 0$, see Pólya-Szegő, Aufgaben etc., II, p. 67.) The author applies this formula to the zeros of Laguerre polynomials. The method seems capable of further applications.

E. Hille (New Haven, Conn.).

Haviland, E. K.: On the expression of a given function as the Fourier-Stieltjes transform of a distribution function whose spectrum is confined to a given set. J. London Math. Soc. 12, 253—257 (1937).

Im Anschluß an die vereinheitlichte Behandlung der verschiedenen polynomischen Momentprobleme [Haviland, Amer. J. Math. 58, 164—168 (1936); dies. Zbl. 15, 109] leitet der Verf. die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Funktionen der Klasse her, die aus den Fourier-Stieltjesschen Transformierten aller monotonen und außerhalb S konstanten Belegungen besteht, wobei S eine beliebig aber fest vorgeschriebene abgeschlossene (nicht notwendig beschränkte) Punktmenge bezeichnet. Die Methode gilt auch im mehrdimensionalen Fall.

Wintner (Baltimore).

Karamata, J.: Ein Konvergenzsatz für trigonometrische Integrale. J. reine angew. Math. 178, 29—33 (1937).

Let $c(u)$ be of bounded variation in every finite interval and $c(u) = 0$ for small $|u|$. Let

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \max_{u \leq u' \leq u+h} |c(\pm u') - c(\pm u)| \leq w(h) \quad \text{for an } h > 0,$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xu} d[c(u)],$$

and

$$F(t) = \int f(t) dt + At + B \quad \text{for } |t - x| < 4\lambda,$$

then

$$\limsup_{\omega \rightarrow \infty} \left| \int_{-\omega}^{\omega} e^{xu} d[c(u)] - \frac{1}{\pi} \int_{-4\lambda}^{4\lambda} \frac{\sin \omega t}{t} f(x+t) dt \right| \leq 2[1 + h|x|]w(h) \left\{ 1 + \frac{3 \log 2}{\pi \lambda h} \right\}.$$

The theorem contains as special cases Riemann's theorem for trigonometric series, extensions of this theorem to general trigonometric series and to trigonometric Stieltjes integrals, and the convergence theorem of M. Riesz für Laplace-Stieltjes integrals.

E. Hille (New Haven, Conn.).

Churchill, R. V.: The solution of linear boundary-value problems in physics by means of the Laplace transformation. I. A theory for establishing a solution in the form of an integral, for problems with vanishing initial conditions. Math. Ann. 114, 591—613 (1937).

Let $F(x, t)$ be the required solution of a two dimensional boundary-value problem,

$f(x, s)$ the Laplace transform of $F(x, t)$ with respect to t . The author finds sufficient conditions on $f(x, s)$ ensuring that the integral inversion formula when applied to $f(x, s)$ will yield a function $F(x, t)$ continuous in x or in t or having a specified number of continuous partial derivatives. Since $f(x, s)$ is determined by a one dimensional boundary value problem, involving the parameter s , it is a fairly easy matter to verify if the conditions are satisfied or not. The conditions are particularly adapted to the needs of problems with vanishing initial conditions. As a preliminary step the author obtains sufficient conditions in order that a Laplace transform $\mathfrak{L}[F] \equiv f(s) = O(1/s)$. He assumes, e.g., that for some $\alpha \geq 0$, $e^{-\alpha t} F(t)$ is bounded and piece-wise monotone in intervals of length $\geq \lambda > 0$. [Ref. It would be simpler and more general to assume that the total variation of $e^{-\alpha t} F(t)$ in $[0, \omega]$ is $O[e^{\varepsilon \omega}]$ for every $\varepsilon > 0$.] He is also concerned with the validity of the integral inversion formula

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\gamma - \omega i}^{\gamma + \omega i} e^{st} f(s) ds.$$

Assuming $f(s)$ analytic and $O(1/s)$ in $\Re(s) \geq \gamma$, and that the integral converges for almost all t , he proves that $f(s) = \mathfrak{L}[F]$. [Ref. The author's condition 2 on p. 601 is superfluous since $s f(s) = O(1)$ implies that the inversion integral exists as a limit in the mean and it is known that $f(s)$ is the Laplace transform of this limit.] Extensions to the derivatives.

E. Hille (New Haven, Conn.).

Funktionalanalysis, Funktionalräume:

Belardinelli, G.: *Funzionali lineari*. Rend. Semin. mat. fis. Milano **10**, 83—111 (1936).

A rapid survey (without proofs) of some work on the theory of linear functionals, primarily that of Pincherle, Volterra and Fantappié. J. D. Tamarkin.

Toscano, Letterio: *Su gli operatori lineari associati*. Atti Ist. Veneto Sci. etc. **95**, 477—486 (1936).

A continuation of research by the author (this Zbl. **14**, 66) dealing with "associated" (Pincherle) linear operators (in the space of infinitely many dimensions) A, X , i.e. such that $AX - XA = 1$. Various relations are derived for the operators $AX^n, X^n A, A^n X, X^{-n+1}, \dots$ which this time employ certain numbers called by the author "generalized binomial coefficients". J. Shohat (Philadelphia).

Vulich, B.: *Sur les formes générales de certaines opérations linéaires*. Rec. math. Moscou, N. s. **2**, 275—303 (1937).

Verf. betrachtet lineare Funktionaloperationen $y = F(x)$, wobei als x -Raum der Raum der nach Lebesgue integrierbaren bzw. der Raum der meßbaren beschränkten Funktionen festgesetzt wird. Als y -Räume werden zugelassen: a) stetige Funktionen, b) integrierbare Funktionen, c) Funktionen von beschränkter Schwankung, d) meßbare und beschränkte Funktionen mit einer der zwei üblichen Normierungen (zwei Funktionenklassen). Der Stetigkeitsbegriff wird entweder nach der üblichen B -Normierung verstanden oder nach einer früher vom Verf. eingeführten Konvergenzart K (dies. Zbl. **16**, 63), oder es wird endlich der Stetigkeitsbegriff benutzt, bei welchem aus $x_n \rightarrow x$ nach der B -Norm, $y_n \rightarrow y$ nach der K -Norm folgt. Die allgemeine Gestalt einer linearen Funktionaloperation in allen oben aufgezählten Fällen wird vom Verf. auf direkte Weise ermittelt. Schauder (Lwów).

Inagaki, Takeshi: *Über das Prinzip in der Theorie der abstrakten Räume*. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I. Math. **5**, 95—106 (1936).

A principle of specialization is defined by the following rules. Given a space R and a property E , an operator O is found such that: (I) O is defined in terms of R ; (II) the operator O transforms R into R^* such that (a) R^* has the property E , (b) if R has the property E , O is the identity and $R = R^*$. Fifteen properties of space and a

number of their combinations are considered in detail and the corresponding operators O are defined for a general space R . *E. W. Chittenden* (Iowa City, Iowa).

Murray, F. J., and J. von Neumann: On rings of operators. II. Trans. Amer. Math. Soc. **41**, 208—248 (1937).

In a previous memoir [Ann. of Math. II. s. **37**, 116—229 (1936); this Zbl. **14**, 161] the authors stated several results for which they here give proofs. The first three chapters of the present paper develop a complete theory of the trace for operators (both bounded and non-bounded) belonging to a factor M in a finite case (i. e. in a case I_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ or in a case II_1). The trace, as previously defined, is extended to all operators A belonging to M ; and is shown to satisfy a relation $Tr_M(A) = \sum_{v=1}^n (Ag_v, g_v)$

for a suitable integer n and suitable elements g_1, \dots, g_n in \mathfrak{H} . The somewhat complicated discussion proceeds through a number of stages (Theorems I—III), beginning with definite self-adjoint operators A and factors M for which the integer n can be taken as $n = 1$. The weak continuity of $Tr_M(A)$ follows at once (Theorem IV). — In the last chapter, Theorems V—XI bring the result that coupled factors M, M' in cases II_1, II_1 with $C = 1$ may be regarded as parts of uniquely determined Hilbert spaces. Two consequences may be drawn from the result, as completely formulated: first, that algebraic isomorphisms between such pairs of coupled factors induce spatial isomorphisms of the Hilbert spaces on which they operate; and, secondly, that the construction of factors of the indicated type amounts essentially to the introduction of a restricted, non-commutative product for the elements of abstract Hilbert space. In an appendix, the authors apply these results to interpret the operators in M as continuous matrices. *M. H. Stone* (Cambridge, Mass., U. S. A.).

Hyers, D. H.: On functional equations in linear topological spaces. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **23**, 496—499 (1937).

Jedem Elemente x eines linearen topologischen Raumes wird eine Menge $K(x)$ mit folgenden Eigenschaften zugeordnet: 1. $K(x)$ ist konvex, 2. $x \in K(x)$; der Nullpunkt θ gehört zu $K(x)$; aus $x \neq \theta, \alpha > 1$ folgt $\alpha x \in K(x)$, 3. $K(\alpha x) = \alpha K(x)$, $\alpha \geq 0$, 4. aus $y \in K(x)$ folgt $K(y) \subset K(x)$, 5. $K(x)$ ist beschränkt. Beispiele für K -Systeme in normierten und linearen topologischen Räumen werden angegeben; die Konstruktion ist immer möglich. Existenzsatz: Sei $z = f(y)$ eine stetige Abbildung in sich einer im passenden Sinne vollständigen Teilmenge Y eines linearen topologischen Raumes T . Wenn für ein K -System $f(y)$ der „Lipschitz“-Bedingung $f(y) - f(z) \subset \mu K(y - z)$, $0 < \mu < 1$ genügt, so ist $y = f(y)$ in Y eindeutig lösbar. Anwendung auf abstrakte Differentialgleichung der Form $\frac{dy}{d\tau} = f(\tau, y)$, $y(\alpha) = a$, τ reell, $y \in T$. *Schauder* (Lwów).

Gantmakher, V., et V. Šmulian: Sur les espaces linéaires dont la sphère unitaire est faiblement compacte. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **17**, 91—94 (1937).

Die Arbeit enthält eine Reihe von Eigenschaften der Banachschen Räume vom Typus (B) und ihrer konjugierten Räume. Es werden die gegenseitigen Beziehungen zwischen den Begriffen der abzählbaren Abgeschlossenheit und der schwachen Kompaktheit der Einheitskugel des gegebenen und des konjugierten Raumes und der Regularität des Raumes untersucht. Insbesondere wird gezeigt, daß die Einheitskugel eines regulären Raumes schwach kompakt ist, und daß die Umkehrung davon für separable Räume gilt. *Kerner* (Warszawa).

Rothe, Erich: Über den Abbildungsgrad bei Abbildungen von Kugeln des Hilbertschen Raumes. Compositio Math. **5**, 166—176 (1937).

In Fortsetzung seiner früheren Untersuchungen (dies. Zbl. **17**, 39) beweist Verf. für Abbildungen $y = F(x) = x + f(x)$ mit vollstetiger Verschiebung $f(x)$ der Einheitskugel S^∞ des Hilbertschen Raumes in sich folgende Sätze: 1. Bleibt bei der Abbildung F ein Punkt der Kugel unbedeckt, so ist der Abbildungsgrad Null. 2. Der

Abbildungsgrad des Produktes zweier Abbildungen ist gleich dem Produkte des Abbildungsgrades. 3. Ist unter passenden Zusatzvoraussetzungen die Abbildung eindeutig, so ist ihr Grad gleich ± 1 . 4. Der Satz von der Gebietsinvarianz gilt unter gewissen Voraussetzungen für eineindeutige in einem Teilgebiete von S^∞ erklärte Abbildungen.

Schauder (Lwów).

Schoenberg, J. J.: On certain metric spaces arising from euclidean spaces by a change of metric and their imbedding in Hilbert space. *Ann. of Math.*, II. s. 38, 787—793 (1937).

PQ bezeichne den endlichen Abstand zweier Punkte des R_m . Durch $d(P, Q) = \overline{PQ}^\gamma$, $0 < \gamma < 1$, werde in R_m eine neue Metrik eingeführt. Es wird bewiesen, daß der so entstehende Raum $R_m^{(\gamma)}$ isometrisch in den Hilbertschen Raum H abgebildet werden kann. Auch der aus H auf dieselbe Weise entstehende Raum $H^{(\gamma)}$ ist in H isometrisch abbildbar. Der Beweis beruht auf einem Resultat von K. Menger [*Anz. Akad. Wiss.*, Wien 65, 159—160 (1928)] und folgen dem Satz: Sind P_0, P_1, \dots, P_n verschiedene

Punkte des R_m , so ist die quadratische Form $\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n (\overline{P_0 P_j}^\alpha + \overline{P_0 P_k}^\alpha - \overline{P_j P_k}^\alpha) x_j x_k$

für jedes $0 < \alpha < 2$ positiv definit. Dies wird mit transzendenten Hilfsmitteln (geeignete Integraldarstellung der Koeffizienten) bewiesen.

G. Köthe.

Bortolotti, E.: La méthode de G. Vitali dans la recherche géométrique: Représentation fonctionnelle et calcul absolu généralisé. (I. internat. Konferenz f. tensorielle Differentialgeometrie u. ihre Anwendungen, Moskau, Sitzg. v. 17.—23. V. 1934.) *Abh. Semin. Vektor- u. Tensoranalysis usw.*, Moskau Liefg. 4, 269—288 (1937).

The author describes the main features of Vitali's ideas in differential geometry. A detailed application of this method can be found in other papers by the same author (this Zbl. 1, 168; 3, 322; 4, 415; 9, 273; 12, 177, comp. also Bompiani, Zbl. 11, 418).

Hlavatý (Princeton, U. S. A.).

Michal, Aristotle D.: Géométrie conforme générale. *C. R. Acad. Sci.*, Paris 205, 552—554 (1937).

The author deals with a general conformal Riemannian geometry in a Hausdorff space with Banach coordinates (see this Zbl. 17, 22). The square of an element of arc is given by a positive definite form defined in terms of a bilinear form on the Banach space postulated independently of the norm. By means of a postulated contraction used elsewhere by the author (see the following review) a conformal differential invariant trilinear curvature form is defined. It is stated that the usual properties of this tensor can be established in this abstract form.

N. Dunford (New Haven).

Michal, A. D.: General projective differential geometry. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* 23, 546—548 (1937).

Using the notion of a Hausdorff topological space with Banach coordinates and with a symmetric linear connection (see this Zbl. 17, 22) the author gives the most general transformation of the linear connection, called projective change of connection, that preserves the equation of parallelism. A projective differential invariant trilinear form (projective curvature form) is defined and with certain restrictions the vanishing of this form is a necessary and sufficient condition that a space be projectively flat (locally). These results are obtained by postulating the existence of a linear functional having the properties of a contraction and defined on the ring of linear mappings of the Banach space into itself.

N. Dunford (New Haven).

Variationsrechnung:

Smiley, Malcolm Finlay: Discontinuous solutions for the problem of Bolza in parametric form. *Contribut. calculus variations 1933—1937*, 527—566 a. Chicago: These (1937).

This paper gives a rather complete discussion of necessary conditions and of sufficient conditions for a minimum in the problem of Bolza, when the minimizing arc has a finite number of corners. Use is made of the latest known results and methods for the case when the minimizing arc has no corners.

Graves (Chicago).

Mancill, Julian Dossy: The minimum of a definite integral with respect to unilateral variations. *Contribut. calculus variations 1933—1937*, 85—164 a. Chicago: These (1937).

This paper treats calculus of variations problems in which part or all of the minimizing curve lies on the boundary of the region (in two or three dimensions) where admissible curves must lie. The author takes up the general case where the minimizing curve may meet the boundary at any angle, and may have several pieces in common with the boundary. In earlier treatments of this problem the hypotheses implied that the minimizing curve could have no corners. For the two dimensional case the author admits corners in the boundary curve also, and considers some cases in which the Weierstrassian E -function may vanish. Graves (Chicago).

Bauman Teach, van: The Hamilton-Jacobi theory for the problem of Lagrange in parametric form. *Contribut. calculus variations 1933—1937*, 165—206 a. Chicago: These (1937).

The author defines a Hamiltonian function H , determines a canonical form for the Euler-Lagrange equations, and derives the relation between solutions of the Hamilton-Jacobi partial differential equation and families of extremals. This is done for the problem of Lagrange in parametric form by introducing a related non-parametric problem involving an additional differential equation $\Phi(y, y') = 1$, where the function Φ is comparatively arbitrary except for being positively homogeneous. Graves (Chicago).

Wiggin, Evelyn Prescott: A boundary value problem of the calculus of variations. *Contribut. calculus variations 1933—1937*, 243—275 a. Chicago: These (1937).

The author considers the accessory boundary value problem associated with the second variation for the problem of Bolza, and establishes the existence of infinitely many characteristic numbers by methods of the calculus of variations. It is not assumed that the problem is normal on sub-intervals. Graves (Chicago).

Goldstine, Herman H.: The minima of functionals with associated side conditions. *Duke math. J.* **3**, 418—425 (1937).

Let I be a functional defined on the class of n -uples of continuous functions $\xi_i(x)$ and having first and second differentials. The author considers the problem of minimizing I in the subclass satisfying the equations

$$\begin{aligned}\Phi_\alpha[x, \xi(x), u(x)] &= 0 \quad (\alpha = 1, \dots, m < n), \\ u_\gamma(x) &= \int_0^x P_\gamma[x, s, \xi(s)] ds \quad (\gamma = n+1, \dots, n+q), \\ u_i(x) &= a_i + \int_0^x \xi_i(s) ds \quad (i = 1, \dots, n), \\ u_i(1) &= b_i \quad (i = 1, \dots, n).\end{aligned}$$

This includes as a special case a generalization of the problem of Lagrange with fixed endpoints, where the differential equations are replaced by integro-differential equations. It is indicated that this problem may be transformed into a more general type of problem, viz., that of minimizing a similar functional J in a class of r -uples of continuous functions which make a finite number of other numerically valued functionals A_μ vanish. For the more general problem analogues of the Lagrange multiplier rule, the Mayer condition, and the Clebsch condition are obtained. The analogue of the Mayer condition is stated in terms of the characteristic values of a linear integral equation. Graves (Chicago).

Kerner, Michael: Drei Beiträge zum Flächenproblem der Variationsrechnung. *Mh. Math. Phys.* **46**, 209—231 (1937).

Ce mémoire est dédié à trois questions de calcul des variations relatives aux intégrales doubles en forme paramétrique

$$I(\mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{E}} \mathfrak{F}(x, y, z, l, m, n) du dv,$$

où $l = y_u z_v - z_u y_v$, $m = z_u x_v - x_u z_v$, $n = x_u y_v - y_u x_v$. — Dans la première partie l'A. établit une condition suffisante pour l'existence d'un champ d'extrémales contenant une surface extrémale donnée \mathfrak{S}_0 . Il suppose que \mathfrak{S}_0 soit analytique, et que les conditions de Legendre-Brunacci et de Jacobi soient vérifiées au sens strict. La démonstration se ramène à des résultats de Lichtenstein [Mh. Math. Phys. 28, 18—35 (1917); Math. Z. 5, 34—40 (1919)]. — Dans la deuxième partie du mémoire l'A. démontre la formule de Weierstrass

$$I(\tilde{\mathfrak{S}}) - I(\mathfrak{S}_0) = \int \int_{\tilde{\mathfrak{S}}} \mathcal{E}(x, y, z, l, m, n, \bar{l}, \bar{m}, \bar{n}) du dv,$$

où \mathfrak{S}_0 est une extrémale entourée par un champ d'extrémales \mathfrak{F} , $\tilde{\mathfrak{S}}$ est une surface dont le contour appartient à la surface \mathfrak{F}_0 transversale au champ \mathfrak{F} et qui passe par le contour de \mathfrak{S}_0 , et l, m, n sont calculés sur la surface du champ \mathfrak{F} passant par le point (x, y, z) de $\tilde{\mathfrak{S}}$. — Dans la troisième partie on démontre que si \mathfrak{S}_0 appartient à un champ \mathfrak{F} de surfaces extrémales et si sur \mathfrak{S}_0 les conditions de Legendre et de Weierstrass sont vérifiées au sens strict, on peut déterminer une partie \mathfrak{F}_0 de \mathfrak{F} , entourant \mathfrak{S}_0 , et telle que sur chaque surface de \mathfrak{F}_0 la condition de Weierstrass soit vérifiée au sens strict. La démonstration est fondée sur une généralisation de la fonction E_1 de Zermelo pour le plan à l'espace à trois dimensions. — Comme conséquence de ces résultats on a que si \mathfrak{S}_0 est une extrémale sur laquelle les conditions de Jacobi, Legendre et Weierstrass sont vérifiées au sens strict, \mathfrak{S}_0 donne un minimum relatif fort pour l'intégrale $I(\mathfrak{S})$. Basilio Manià (Pavia).

Funktionentheorie:

Hibbert, Lucien: Cellules d'univalence des polynômes. C. R. Acad. Sci., Paris 205, 1121—1123 (1937).

Discusses the two families of curves on which a polynomial is respectively of constant modulus and of constant amplitude. Macintyre (Aberdeen).

Hibbert, Lucien: Surface des modules et automorphie des polynômes et des fonctions entières. C. R. Acad. Sci., Paris 205, 1206—1208 (1937).

The ideas of a previous paper (see the prec. review) are continued in order to discuss the functional relation between two roots of the equation $w = f(z)$ (as w varies). Extensions to integral functions are mentioned. Macintyre (Aberdeen).

Duffin, R. J., and A. C. Schaeffer: Some inequalities concerning functions of exponential type. Bull. Amer. Math. Soc. 43, 554—556 (1937).

Let $f(z)$ be an entire function, real if z is real, and subject to the condition $|f(z)| = O(e^{|z|})$; let $|f(z)| \leq 1$ if z is real. Then

$$|f(z)|^2 + |f'(z)|^2 \leq \cosh 2y, \quad z = x + iy.$$

The authors prove first the special case $y = 0$ of this inequality (without the restriction of the reality of $f(z)$ for real z); this case is closely related to a theorem of S. Bernstein and to certain generalizations of this due to the reviewer and Boas. The general inequality follows then by considering the derivatives of $f(z)$.

G. Szegő (St. Louis, Mo.).

Milloux, Henri: Sur la théorie des fonctions méromorphes dans le cercle unité. Ann. École norm., III. s. 54, 151—229 (1937).

In einem ersten Teil beweist Verf. einige Ungleichungen, die den Schottky-Landauschen Satz als Spezialfall enthalten, ein zweiter handelt über die Wertverteilung meromorpher Funktionen. — I. Mittels des zweiten Satzes der Wertverteilungslehre, in Verbindung mit einer Verallgemeinerung des Satzes von Boutroux-H. Cartan auf eine hyperbolische Maßbestimmung (vgl. dies. Zbl. 17, 23) und der Carleman-Milloux-schen Ungleichung beweist Verf. in der Hauptsache folgendes: Die Funktion $f(z)$ sei im Einheitskreis meromorph und nehme dort höchstens n -mal den Wert 0, p -mal den Wert 1 und q -mal den Wert ∞ an. Ist nach Ausschluß gewisser Ausnahmefälle

um die 0-, 1- und ∞ -Stellen von der hyperbolischen Radiensumme $2e/100$ in einem Punkte z_0 des Kreises $|z| \leq 1/2$ $|f(z_0)| < M$, so gilt

$$m(r, f) < k(n + p + q) + k \log^+ M + k \log \frac{1}{1-r} + k \quad (1)$$

für $0 < r < 1$ und

$$(1 - |z|) \log |f(z)| < k(n + p + q) + k \log^+ M + k - kq \log h \quad (2)$$

für alle $|z| < 1$ bis auf kleine Ausnahmekreise um die Pole mit der Radiensumme $< zeh$. k bezeichnet numerische Konstante, nicht immer dieselbe. Ähnliche Ungleichungen gelten für a, b, c an Stelle von $0, 1, \infty$, sofern die Kugelabstände von a, b, c mitberücksichtigt werden. In Verbindung mit der Jensen-Nevanlinnaschen Formel ergibt (1) eine entsprechende Ungleichung für die charakteristische Funktion $T(r, f)$. Im Falle regulärer Funktionen gelten (1) und (2) mit $q = 0$ und unter Wegfall der Ausnahmekreise um die Pole. Für $n = 0$ und $p = 0$ liefert (2) die Schottky-Landausche Ungleichung, die hier wohl zum erstenmal mit dem zweiten Hauptsatz von R. Nevanlinna bewiesen wurde. — Im Beweisverfahren spielt der verallgemeinerte Satz von Boutroux-H. Cartan eine wesentliche Rolle. Er gestattet die Voraussetzungen über die Punktmenge, in der $|f(z)| < M$, abzuschwächen, die Sätze über reguläre Funktionen leicht auf meromorphe zu übertragen und vor allem gewisse Probleme quantitativ und von „individuellem“ Gesichtspunkte aus zu behandeln, die P. Montel qualitativ und mit der Theorie der quasiregulären Scharen gelöst hat. Ein diesbezügliches Resultat: Ist $f(z)$ in $|z| \leq 1$ regulär und in $(m + 1)$ Punkten des Kreises $|z| \leq u$ absolut kleiner als M , so ist

$$(1 - u)(1 - |z|) \log |f(z)| < k(n + p) + k \log^+ M + k - km \log \delta. \quad (3)$$

m ist die kleinste der Zahlen n, p ; δ der minimale hyperbolische Abstand der $(m + 1)$ Punkte. Auch der kompliziertere Fall, wo $f(z)$ in weniger als $(m + 1)$ Punkten die Schranke M besitzt, dafür aber ihre sukzessiven Derivierten in Betracht gezogen werden, führt auf eine Ungleichung ähnlicher Form. — II. Die Ungleichung (2) ergibt eine Abschätzung der α -Stellen für Funktionen, die drei Werte höchstens m -mal annehmen:

$$(1 - r) \cdot n(r, \alpha) < k \cdot m + k \log \frac{1}{d} + k + k \log \frac{1}{h}, \quad (4)$$

ausgenommen höchstens solche α , die auf der Riemannschen Kugel in Kreise von der Radiensumme $< 2eh$ eingeschlossen werden können. d bedeutet die minimale Kugeldistanz der drei Ausnahmewerte. Ungleichung (4) erlaubt, die Existenz von cercles de remplissage für Funktionen im Einheitskreis nachzuweisen und Ergebnisse über Borelsche Punkte einfacher zu beweisen (Näheres vgl. dies. Zbl. 16, 218). *Pfluger*.

Dinghas, Alexander: Bemerkungen zur Ahlforsschen Methode in der Theorie der meromorphen Funktionen. I. *Compositio Math.* 5, 107—118 (1937).

Den Hauptsätzen der Theorie der meromorphen Funktionen wurde eine sehr übersichtliche Form von Ahlfors (dies. Zbl. 11, 259) gegeben. Die Methode von Ahlfors wird erweitert, indem die Jensensche Formel, die bei Ahlfors als Grundlage dient, durch eine etwas allgemeinere potentialtheoretische Formel von F. und R. Nevanlinna [*Acta Soc. Sci. Fennicae* 50 (1922)] ersetzt wird. *Nevanlinna*.

Flamant, Paul: Étude des familles compactes de fonctions dans les classes quasi analytiques (D). *J. Math. pures appl.*, IX. s. 16, 375—420 (1937).

L'A. développe et démontre les résultats qui ont été énoncés dans ses deux Notes aux C. R. [C. R. Acad. Sci., Paris 197, 1282 (1933), ce Zbl. 8, 76; C. R. Acad. Sci., Paris 203, 652 (1933), ce Zbl. 15, 72]. Si $\varphi \in C_{\{A_n\}}$, c'est-à-dire si $|\varphi^{(n)}(x)| < K^n A_n$, $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{A_n}} = \infty$, le type s est la classe des fonctions φ telles que $\frac{|\varphi^{(n)}(x)|}{A_n s^n} < M(s)$. $\|\varphi\| = \|\varphi\|_s =$ la norme de φ dans le type $s =$ borne $\frac{|\varphi^{(n)}(x)|}{A_n s^n}$ ($n \geq 0, a \leq x \leq b$). On définit la convergence en norme, et l'on étudie les différentes propriétés de cette convergence.

Étude de la distribution des zéros de la fonction limite. Étude de la compacité. — Dans la seconde partie on étudie les classes particulièrement régulières: Étude de la norme des dérivées, du produit etc. des fonctions dont on connaît la norme.

Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

Bochner, S.: Bounded analytic functions in several variables and multiple Laplace integrals. *Amer. J. Math.* 59, 732—738 (1937).

It is well known that in the theory of analytic functions of several complex variables certain properties (in particular analyticity), when valid in certain regions, extend to larger regions. The author discusses two examples of this phenomenon. He proves that if $f(z_1, \dots, z_k)$ is analytic in a tube $T: (x_1, \dots, x_k) \in S (= \text{any open domain in the real space}), -\infty < y_i < +\infty (i = 1, \dots, k)$ and is respectively either of integrable square in the y 's or bounded, the same properties will hold in the smallest convex tube containing the original one. The proof is based on a representation of $f(z)$ by a multiple Laplace integral. — Since then the author has succeeded in proving an even more interesting example of the same phenomenon, namely that if $f(z_1, \dots, z_k)$ is analytic in a tube T , it remains analytic in the smallest convex tube containing T . His proof will appear in the January number of the *Ann. of Math.* 39 (1938).

F. Bohnenblust (Princeton, N. J.).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik:

Madow, William G.: Contributions to the theory of comparative statistical analysis. I. Fundamental theorems of comparative analysis. *Ann. math. Statist.* 8, 159—176 (1937).

Von der Kolmogoroffschen Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung ausgehend werden exakte Formeln für Wahrscheinlichkeiten verschiedener Eventualitäten betreffend eine endliche Reihe von Ereignissen aufgestellt. Als Beispiel diene: Sind die gegebenen Ereignisse in n Gruppen eingeteilt, so wird die Wahrscheinlichkeit dafür ermittelt, daß nicht mehr als j_k und nicht weniger als i_k von den Ereignissen der k -ten Gruppe ($k = 1, 2, \dots, n$) eintreten.

A. Khintchine (Moskau).

Erdélyi, A.: Sulla connessione fra due problemi di calcolo delle probabilità. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* 8, 328—337 (1937).

Es seien x_1, x_2, \dots, x_n gegenseitig unabhängige, nach einem Gaußschen Gesetz (Präzisionsmaß h) verteilte zufällige Größen. Für die Wahrscheinlichkeitsdichte $p_n(y)$ der Größe $\left(\sum_{k=1}^n |x_k|\right)/n$ wird die zugehörige charakteristische Funktion aufgestellt. Bedeutet ferner $r_n(z)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte der Größe $\left(n \sum_{k=1}^n x_k^2\right) / \left(\sum_{k=1}^n |x_k|\right)^2$, so gilt

$$p_n(y) = \frac{2h^n n^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} y^{n-1} \int_{-1}^n e^{-nh^2 y^2 z} z^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{z-1} r_n(z) dz.$$

Hieraus kann mit Hilfe einer Paley-Wiener-Doetschschen Inversionsformel umgekehrt $r_n(z)$ durch $p_n(y)$ ausgedrückt werden, was hier die eigentliche Aufgabe bildet, da die unmittelbare Erforschung von $p_n(y)$ wesentlich einfacher als diejenige von $r_n(z)$ ist.

A. Khintchine (Moskau).

Hoel, Paul G.: A significance test for component analysis. *Ann. math. Statist.* 8, 149—158 (1937).

Consider a set of n random variables X_i with the elementary probability law

$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = K e^{-\sum_{i,j} A_{ij} x_i x_j}$ where x_i denotes the special value of X_i . If ϱ_{ij} denotes the correlation coefficient and σ_i and σ_j the standard deviations of X_i and X_j ,

then $\Delta = |\varrho_{ij}|$, A_{ij} is the cofactor of ϱ_{ij} in Δ , $A_{ij} = \Delta_{ij}/2\sigma_i\sigma_j\Delta$ and $K = |A_{ij}|^{1/2}/(2\pi)^{n/2}$. Suppose that N independent systems of observations of the X_i are to be made and denote by $X_{i\alpha}$ the value of X_i to be observed in α -th system while \bar{X}_i will be the mean of all $X_{i\alpha}$. Next let $a_{ij} = \sum_{\alpha=1}^N (X_{i\alpha} - \bar{X}_i)(X_{j\alpha} - \bar{X}_j)/N$ and $z = |a_{ij}|$. Wilks has deduced [Biometrika 24, 477 (1923)] the formula for the k -th moment of the variable z . However, the corresponding distribution $p(z)$ is not known. The author notices that the ratio of the moments of $p(z)$ and of those of the function $g(z) = cz^m e^{-n\sqrt{az}}$ differ from unity by terms of the order of N^{-2} . Here $m = (N - n - 2)/2$ and $a = N^n |A_{ij}| \{1 - (n-1)(n-2)/2N\}$ while C denotes a constant factor which reduces to unity the integral of $g(z)$ taken between zero and infinity. The above fact suggests that, for large values of N , the function $g(z)$ must give a reasonable approximation of the actual distribution of z . As the integrals of $g(z)$ between any given limits can be easily calculated from the Tables of the Incomplete Gamma Function, the author suggests that, whenever the values of $X_{i\alpha}$ are actually observed, the function $g(z)$ may be used to test the hypotheses concerning the value of $|A_{ij}|$. By means of certain additional assumptions, these results can be adapted to treat the problem of factor analysis.

J. Neyman (London).

Versicherungsmathematik und verwandte Anwendungen:

● Böhm, Friedrich: Versicherungsmathematik. I. Elemente der Versicherungsrechnung. 2., verm. u. verb. Aufl. (Samml. Gösch. Nr. 180.) Berlin u. Leipzig: Walter de Gruyter 1937. 151 S. geb. RM. 1.62.

Das Bändchen behandelt unter Benutzung von elementaren Hilfsmitteln die Grundlagen der Versicherungsmathematik. 1. Kap. bringt Ausführungen über Zinseszinsrechnung, 2. Kap. über biometrische Größen und einmalige und jährliche Prämien der üblichsten Versicherungsformen. 3. Kap. ist der Darstellung der Nettoreserven gewidmet und enthält u. a. einen Abschnitt über Vertragsänderungen. Im 4. Kap. werden die Kosten als Rechnungsgrundlage neben Zins und Sterblichkeit eingeführt und in diesem Zusammenhang die Bruttoreserven (Zillmerreserven) behandelt. 5. Kap. bringt schließlich die Hauptzüge der Versicherung verbundener Leben. *Simonsen*.

Medolaghi, P.: La utilità delle assicurazioni. Giorn. Ist. Ital. Attuari 8, 289—296 (1937).

Die Neigung einer Einzelperson, eine Versicherung abzuschließen, kann gemäß der vom Verf. aufgestellten Theorie auf den Vergleich zurückgeführt werden zwischen dem Unbehagen, das einerseits durch die sichere Bezahlung der Prämie (h) und andererseits durch die Aussicht auf den zufälligen Verlust der zu versichernden Güter (s) verursacht wird. Der Verf. nimmt nun an, daß ein Besitzer des Kapitals c angesichts eines mit der Wahrscheinlichkeit p zu erwartenden Verlustes s ein Unbehagen empfinde, das mit $p \cdot f(c, s)$ gemessen werden könne, wobei f eine, gewisse Bedingungen erfüllende Funktion bedeute. Dann sei die Nützlichkeit der Versicherung mit $u = p \cdot f(c, s) - f(c, h)$ darstellbar; von diesem Standpunkt aus werden vom Verf. einige „Optimum“-Probleme behandelt und einige allgemeine Fragen gestellt.

Bruno de Finetti (Trieste).

Thesen, Gudbrand: Le calcul de la prime en réassurance d'excédent de sinistres. Skand. Aktuarie Tidskr. 20, 272—279 (1937).

Im Anschluß an Arbeiten von P. Dubois und J. Hesselberg (C. R. XI. Congr. Intern. d'Actuaires I, 1937, 397—412 u. 417—432) behandelt Verf. das für die Technik der Rückversicherung wichtige Problem der Konstantenbestimmung der Schadenverteilung $f(Z)$, wo Z der Schadensbetrag ist, unter der Voraussetzung von normaler

Verteilung der Schäden: $f(Z) = \frac{1}{M\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(Z-\Pi)^2}{2M^2}}$. W. Simonsen (Kopenhagen).

Neubaus, J.: Sulla determinazione dei pieni di conservazione nelle assicurazioni sulla vita. Giorn. Ist. Ital. Attuari 8, 350—353 (1937).

Demaria, G.: Correlazioni economiche nel tempo. Rend. Semin. mat. fis. Milano 10, 255—277 (1936).

Nach einer allgemein gehaltenen Besprechung gewisser korrelationstheoretischer Fragen folgt eine Übersicht über Konjunkturzusammenhänge. Zur Beschreibung benutzt der Verf. eine schematisch-graphische Darstellung des zusammengesetzten Konjunkturverlaufes, wobei für jede Art von Zeitreihen deren durchschnittlicher Verlauf durch ein zickzackförmiges Band (campo di variabilità) angedeutet wird.

Herman Wold (Stockholm).

Bell, Clifford: Mathematics of finance of the past and present. Scientia 62, 321—325 (1937).

Numerische und graphische Methoden.

● Semiller, Hermann, und Adolf Semiller: Vierstellige Logarithmen- und Zahlentafeln. Ausg. B. Mit mathematischer Formelsammlung. 3. Aufl. Berlin: Julius Springer 1938. 32 S. Geb. RM. 2.40.

Weinig, F.: Rechenpapiere zum Integrieren durch Auszählen. (Hauptvers. d. Ges. f. angew. Math. u. Mech., Bad Kreuznach, Sitzg. v. 17.—18. IX. 1937.) Z. angew. Math. Mech. 17, 369—370 (1937).

Higgins, T. J.: Slide-rule solutions of quadratic and cubic equations. Amer. Math. Monthly 44, 646—647 (1937).

Cesari, Lamberto: Sulla risoluzione dei sistemi di equazioni lineari per approssimazioni successive. Estratta della: Rass. Poste, Telegr. e Telef. 4, 37 pag. (1937).

Ausführliche Darstellung des vom Verf. angegebenen allgemeinen Algorithmus zur sukzessiven Approximation der Lösung eines linearen Gleichungssystems. Ableitung eines allgemeinen Konvergenzkriteriums sowie einiger hieraus folgenden, praktisch brauchbaren, hinreichenden Konvergenzbedingungen. Ferner wird gezeigt, wie die wichtigsten bekannten Iterationsverfahren sich als Sonderfälle des allgemeinen Algorithmus ergeben; es werden die zugehörigen speziellen Konvergenzkriterien bzw. Kriterien für die Geschwindigkeit der Konvergenz abgeleitet. Da zur numerischen Auswertung der Kriterien ein Überblick über die charakteristischen Wurzeln der Koeffizientenmatrix erforderlich ist, entwickelt Verf. unter Benutzung des Satzes von Sylvester einige praktische Methoden zur Berechnung dieser Wurzeln. Zur Beschleunigung der Konvergenz des von Misesschen (und damit im allgemeinen auch anderer) Iterationsverfahren kann man das vorgelegte Gleichungssystem in andere Systeme mit denselben Lösungen transformieren. Dies geschieht durch Erweiterung mit gewissen Matrizenpolynomen, deren Form Verf. ableitet. Es folgt eine Abschätzung der mit diesen Transformationen erzielbaren Konvergenzverbesserung. Zum Schluß Zahlenbeispiele. (S. auch dies. Zbl. 17, 79.) S. Gradstein (Breganzona).

Schmidt, Adolf: Über die Methode von Arthur Schuster zur analytischen Darstellung numerisch gegebener Funktionen auf der Kugelfläche. Terrestr. Magnet. Atmosph. Electr. 42, 347—354 (1937).

Die gegebene Funktion $f(\theta, \varphi)$ (Poldistanz θ , Länge φ) wird längs der Parallelkreise harmonisch analysiert:

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} [k^{\sigma}(\theta) \cos \sigma \varphi + K^{\sigma}(\theta) \sin \sigma \varphi].$$

Dann werden die Koeffizienten k^{σ} durch die zugeordneten Kugelfunktionen $P_n^{\sigma}(\cos \theta)$ linear ausgedrückt,

$$k^{\sigma} = \sum_{n=\sigma}^{\infty} g_n^{\sigma} P_n^{\sigma},$$

ebenso die K^σ mit Koeffizienten h_n^σ . Schusters Methode erleichtert die numerische Berechnung der g_n^σ und h_n^σ dadurch, daß k^σ (und K^σ) zunächst nach θ in Fourierreihen entwickelt werden,

$$k^\sigma = \sum_p a_p^\sigma \cos p\theta \text{ für } \sigma \text{ ungerade, } k^\sigma = \sum_p b_p^\sigma \sin p\theta \text{ für } \sigma \text{ gerade;}$$

für $\cos p\theta$ und $\sin p\theta$ werden dann die Koeffizienten der Entwicklungen nach den P_n^σ (mit konstantem σ) ein für allemal angegeben. Schmidt diskutiert, warum Schuster die unendlichen Reihen für $\cos p\theta$ oder $\sin p\theta$ den endlichen Reihen vorgezogen hat, und gibt Hilfstafeln für den Gebrauch der Methode mit seinen normierten Kugelfunktionen (dies. Zbl. 14, 159). Die Methode sollte nur verwendet werden, wenn $f(\theta, \varphi)$ auf der ganzen Kugelfläche mit gleicher Genauigkeit bekannt ist; das trifft in der Geophysik meist nicht zu.

J. Bartels (Potsdam).

Pipes, Louis A.: Solution of variable circuits by matrices. J. Franklin Inst. 224, 767—777 (1937).

Näherungsmethode zur Lösung von linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten. Die Koeffizientenfunktionen werden durch Treppenfunktionen angenähert. Dann können für jedes Konstantintervall die Endwerte der Veränderlichen und ihre Ableitungen bis zur $(n-1)$ -ten in elementarer Weise linear durch ihre Anfangswerte ausgedrückt werden. Nach p Schritten erhält man $(y, y', \dots, y^{(n-1)})$ als lineare Funktion der Anfangswerte, die entsprechende Verkettungsmatrix als Produkt von $2p$ Matrizen. Das Verfahren wird an einem einfachen, elementar lösbaren Sonderfall der Hillschen Differentialgleichung illustriert.

Baerwald.

Rosseland, Svein: Über einen Differentialanalysator. Norsk mat. Tidsskr. 19, 134—138 (1937) [Norwegisch].

Bilder und kurze Angabe des Konstruktionsprinzips eines Apparates zur Lösung von Differentialgleichungen, der soeben am Astrophysikalischen Institut in Oslo konstruiert wurde. Das Prinzip ist dasselbe wie beim Vannevar-Bushschen Analysator in Cambridge, Mass. Zur Verfügung stehen sieben Registriertische (input tables).

W. Feller (Stockholm).

Geometrie.

● Roth, Eugen: Axiomatische Untersuchungen zur projektiven, affinen und metrischen Geometrie. (Forsch. z. Logik u. z. Grundlegung d. exakt. Wiss. Hrsg. v. Heinrich Scholz. Unter Mitwirkung v. W. Ackermann, F. Bachmann, G. Gentzen u. A. Kratzer. N. F., H. 2.) Leipzig: S. Hirzel 1937. 58 S.

Nach einleitenden Bemerkungen über den logistischen Aufbau einer axiomatischen Geometrie werden die im weiteren benutzten Axiomensysteme AS_p , AS_a und AS_e für die projektive, die affine bzw. die euklidische Geometrie eingeführt. Der II. Abschnitt beginnt mit einer Erörterung des Struktur- und Modellbegriffs und einigen Andeutungen über eine mögliche erweiterte Fassung der Äquivalenz von Axiomensystemen. Das AS_p wird sodann mit einigen anderen Typen von Axiomensystemen der projektiven Geometrie hinsichtlich der Äquivalenz verglichen, und die Grundprädikate der drei zugrundegelegten Axiomensysteme werden auf ihre Unabhängigkeit geprüft. Ein weiterer Abschnitt und 2 Anhänge beschäftigen sich vom logistischen Standpunkt aus mit den Monomorphiebeweisen für die drei Axiomensysteme, dem Erlanger Programm Kleins, den verschiedenen Vollständigkeitsbegriffen (für die logistische Präzisierungen angegeben werden), dem Verhältnis der Strecken- und Winkelkongruenz und dem Hilbertschen Vollständigkeitsaxiom.

Arnold Schmidt.

Steck, Max: Zur Axiomatik der reellen ebenen projektiven Geometrie. II.: Die Unabhängigkeit des E.P.-Axioms und des S.K.-Axioms von den Verknüpfungaxiomen. Mh. Math. Phys. 46, 93—121 (1937).

Die in Liebmann „Synthetische Geometrie“ betrachteten Forderungen E.P.-Axiom (bezüglich eines nichtzerfallenden Kegelschnitts gibt es außer den Punkten

seiner Tangenten noch und nur noch solche Punkte, durch die lauter Treffgeraden gehen) und S.K.-Axiom (zwei nichtzerfallende Kegelschnitte, die einen Punkt, nicht aber die zugehörigen Tangenten gemein haben, haben einen weiteren Punkt gemein) sind von den übrigen dort benutzten Axiomen — Hilbertsche Verknüpfungsaxiome, Fanoaxiome, Vertauschungsaxiome (vgl. dies. Zbl. 10, 369) — wie a. a. O. S. 75f. bewiesen wurde, unabhängig. Steck zeigt, daß in der von ihm mehrfach untersuchten endlichen Veblengeometrie (s. dies. Zbl. 17, 81), die die erwähnten Verknüpfungsaxiome erfüllt, das E.P.-Axiom (und zwar bereits sein erster Teil) und das S.K.-Axiom nicht gelten. Für beide Unabhängigkeiten ist das betrachtete Veblensystem Minimalmodell.

Arnold Schmidt (Marburg, Lahn).

Fano, G.: Osservazioni su alcune „geometrie finite“. I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 26, 55—60 (1937).

An elementary synthetic proof of the well-known fact that if $n + 1$ is the number of points on a line in a finite projective plane (and hence $n^2 + n + 1$ is the number of points in the whole plane), then n is necessarily a power of a prime number p , and $p = 2$ if and only if the harmonic quadruples do not consist of four distinct points (an equivalent condition is that the diagonal points of a complete quadrangle be collinear).

O. Zariski (Baltimore).

Fano, G.: Osservazioni su alcune „geometrie finite“. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 26, 129—134 (1937).

Synthetic and schematic description of the configuration of the $n^2 + n + 1$ points in a projective plane of a finite geometry mod. 2 (arising from a commutative field of characteristic 2).

O. Zariski (Baltimore).

Lorenz, Karl: Ein Dreieckssatz. Deutsche Math. 2, 587—590 (1937).

Nehring, Otto: Brocardsche Gebilde und Zachariassche Konstruktion. Deutsche Math. 2, 634—636 (1937).

Gambier, Bertrand: Trisectrices des angles d'un triangle. Bull. Sci. math., II. s. 61, 360—368 (1937).

Thébault, V.: Sur la géométrie du triangle et du tétraèdre. Ann. Soc. Sci. Bruxelles, Sér. I 57, 145—155 (1937).

Delens, P.: Tétraèdres et sphères de Roberts. Ann. Soc. Sci. Bruxelles, Sér. I 57, 155—164 (1937).

Natucci, A.: Un quarto criterio di similitudine per triangoli. Period. Mat., IV. s. 17, 225—229 (1937).

Bompiani, E.: Sui cerchi tangenti ad una conica. Period. Mat., IV. s. 17, 230—237 (1937).

Kárteszi, Ferenc, e B. Levi: Probabilità dello spezzamento di un segmento in parti che possano essere i lati di un n -gono. Period. Mat., IV. s. 17, 238—242 (1937).

Szász, Pál: Bemerkung zu einer Arbeit von J. Kürschák. Mat. fiz. Lap. 44, 165—167 u. deutsch. Zusammenfassung 167 (1937) [Ungarisch].

Kürschák hat [Math. Ann. 30, 578—581 (1887)] den Steinerschen Satz, daß unter allen einem Kreis einbeschriebenen konvexen n -Ecken das reguläre den größten Inhalt hat, mit Hilfe des folgenden einfachen Satzes bewiesen: Es sei $ABCD$ ein konvexes Sehnenviereck und S der Schnittpunkt seiner Diagonalen; aus $\widehat{AD} > \widehat{BC}$ folgt dann $AS > BS$ und $DS > CS$. Dieser Satz wird unabhängig vom Parallelenaxiom und damit (auf dem Kürschákschen Wege) der Steinersche Satz in der nicht-euklidischen Geometrie bewiesen. (Referiert nach dem Auszug.)

W. Fenchel.

Cantoni, Riccardo: L'equazione dei pentagoni articolati inscrittibili. Ist. Lombardo, Rend., III. s. 70, 317—329 (1937).

Die Abhandlung soll der erste Teil einer umfassenderen Arbeit sein. Heißen a, b, c, d, e die Längen der Schenkel eines Gelenkfünfecks, dann gibt es 7 Formen

des Fünfeckes, die je einem Kreise einbeschrieben werden können. Die Radien ϱ_i ($i = 1, \dots, 7$) dieser Kreise erfüllen eine Gleichung siebenten Grades, deren Koeffizienten ganze rationale symmetrische Funktionen in a^2, \dots, e^2 sind. — Verf. bestrebt sich zu beweisen, daß die Gleichung eine transitive Galoissche Gruppe von der Ordnung 7! besitzt. Die Behauptung ist wahrscheinlich richtig, sie muß aber anders begründet werden. Die ganze Überlegung ruht auf der Vermutung, daß die 7 Wurzeln der obigen Gleichung in einer gewissen Umgebung der Stelle $a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = e^2$ alle reell (und verschieden) sind, weil für $a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = e^2$ genau $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = \varrho_4 = \varrho_5 \neq \varrho_6 \neq \varrho_7$, mit $\varrho_1, \varrho_6, \varrho_7$ reell, gilt. Um aus dieser Bemerkung auf die Realität der ersten vier Wurzeln in der „unitären Umgebung“ schließen zu können, ist eine Besprechung der Puiseuxschen Entwicklungen nötig, die hier aber nicht unternommen wird.

D. Barbilian (Bucuresti).

Reinicke, Richard: Über gleichzeitig auf Würfel- und Kugeloberflächen gelegene „merkwürdige Punkte“. Z. Kristallogr. A 98, 89—106 (1937).

Um einen würfelförmigen Kern, der aus 8 Würfeln der Kantenlänge 2 besteht, werden weitere gleich große Würfel derart gelagert, daß immer wieder Würfel entstehen. Dabei wird jedem Würfel eine Zahl zugeordnet, die gleich dem Quadrat des Abstandes seines Zentrums vom Zentrum der ganzen Konfiguration ist. Besonders wird der 45. Hüllwürfel hinsichtlich der zugeordneten Zahlen seiner Einzelwürfel untersucht. Einzelne dieser Zahlen kommen (im Flächenoktanten) einmal, andere zwei-, drei- oder viermal vor. Es wird viel empirisch gefundenes Zahlenmaterial gebracht und nach zahlentheoretischen Gesetzmäßigkeiten gesucht. W. Nowacki (Bern).

● **Patterson, Boyd Crumrine:** Projective geometry. New York: John Wiley & Sons a. London: Chapman & Hall, Ltd. 1937. XIII, 276 pag. a. 113 fig. bound 17/6.

Das Werk ist eine Einführung in die projektive Geometrie in synthetischer Form und beginnt mit den Elementen und Grundgebilden der projektiven Geometrie, dem Prinzip der Dualität nebst einem für diesen Aufbau ausreichenden Axiomensystem, dessen wesentlicher Teil die Axiome der Verknüpfung wiedergibt. Es folgen die Behandlung umkehrbar eindeutiger Verwandtschaften der Grundgebilde, die Perspektivität, das Desarguesche Theorem, die harmonische Lage. Nach einer ersten Unterscheidung projektiver und metrischer Eigenschaften wird das Doppelverhältnis eingeführt und mit Hilfe seiner Invarianz gegenüber den Operationen des Projizierens und Schneidens ein Ausgangspunkt für die allgemeine Theorie der Projektivitäten gewonnen. Mit dem Fundamentalsatz ist ein natürlicher erster Abschnitt des Aufbaus erreicht. Die weiteren Abschnitte enthalten die Theorie der Kegelschnitte und Kegel zweiten Grades nebst ihrer Polarentheorie und metrischen Eigenschaften sowie die Behandlung der Regelflächen zweiten Grades. Danach wird die Theorie der projektiven Verwandtschaften ausgebaut, vornehmlich die Theorie der Involutionen, so daß die v. Staudtsche Theorie des Imaginären und ihre Bedeutung für den Aufbau des Ganzen verständlich wird. Die Gruppe der Kollineationen in der Ebene und ihre Untergruppen bilden den Abschluß. — In dem hiermit abgegrenzten Bereiche kommt unter Anwendung der synthetischen Methode der klare, organische und übersichtliche Aufbau der Disziplin und die beherrschende Stellung einiger wesentlicher Prinzipien inhaltlich, formal und ästhetisch zur vollen Geltung. Haenzel (Karlsruhe).

Krames, Josef: Die Borel-Briard-Bewegung mit punktweise gekoppelten orthogonalen Hyperboloiden. (Über symmetrische Schrotungen VI.) Mh. Math. Phys. 46, 172—195 (1937).

(S. die früheren Arbeiten, dies. Zbl. 16, 367, 368; 17, 82.) Werden die Raumgeraden einer aufrechten Ellipsenbewegung unterworfen, so erhält man metrisch ausgezeichnete Regelflächen 4. Gr. θ . Diese lassen sich analog den gewöhnlichen Regelschraubflächen, je nachdem die erzeugende Gerade die Achse der Bewegung schneidet oder nicht schneidet, zu ihr schief- oder rechtwinklig ist, in vier Arten einteilen. In der vorliegenden Arbeit werden diese Regelflächen θ als Grundflächen von sym-

metrischen Schrotungen gewählt. Es stellt sich heraus, daß im allgemeinen Fall (θ schief und offen) eine von Borel und Bricard auf anderem Wege untersuchte Bewegung herauskommt, bei der die Punkte eines gewissen orthogonalen Hyperboloids (S) sphärische Raumkurven 4. O. mit einem Doppelpunkt beschreiben, die den absoluten Kegelschnitt i in zwei Punkten J_1, J_2 berühren. Jeder Punkt allgemeiner Lage beschreibt eine rationale Raumkurve 4. O. ohne Doppelpunkt, die, ohne sphärisch zu sein, i in J_1 und J_2 berührt. Die Kugelmitten M der von den Punkten S von (S) beschriebenen sphärischen Bahnkurven liegen auf einem zu (S) kongruenten Hyperboloid (P), so daß die Bewegung durch eine Kopplung dieser beiden Hyperboloide erzeugt werden kann. Für die Achsenflächen der betrachteten Bewegung gilt folgendes: Ist die der Schrotung zugrunde liegende Regelfläche θ schief und offen, so sind die Achsenflächen Flächen von derselben Art; ist θ offen und gerade, so sind die Achsenflächen Drehzylinder; ist θ geschlossen und schief oder gerade, so liegen besondere von R. Bricard untersuchte Bewegungen vor, die der Verf. in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 16, 368) behandelt hat. — Es ist auf engem Raum unmöglich, die zahlreichen teils neuen, teils bekannten Einzelheiten wiederzugeben, die der Verf. behandelt. Nur so viel sei gesagt: Dadurch, daß der betrachteten Bewegung der Begriff der symmetrischen Schrotung zugrunde gelegt wird, erhält man einen tiefen Einblick in die Theorie dieser Bewegung und erkennt leicht ihre Zusammenhänge mit verwandten Bewegungen.

E. Kruppa (Wien).

Analytische und algebraische Geometrie:

Schrutka, Lothar v.: Über den Entwicklungssatz der Vektorrechnung. Deutsche Math. 2, 591 (1937).

Weiss, E. A.: Über den Entwicklungssatz der Vektorrechnung. Bemerkung zu der vorstehenden Note von L. v. Schrutka. Deutsche Math. 2, 592 (1937).

Weiss, E. A.: Das Linienelement als singuläre Punktreihe. II. J. reine angew. Math. 178, 123—126 (1937).

Im Anschluß an die erste Mitteilung des Verf. (vgl. dies. Zbl. 16, 272), in der die erste Liesche Abbildung der ebenen Linienelemente auf Punkte des R_3 durch Projektion der Segreschen M_3 aus einer Sehne erhalten wurde, untersucht jetzt der Verf. den Fall, bei dem aus einer Tangente der M_3 projiziert wird. Einer Geraden des Bildraums entspricht jetzt eine „befestigte Parabel“ bei sinngemäßer Deutung unendlich ferner Elemente in der Ebene der Linienelemente. Wird nun, wie im ersten Fall, eine Drehung aller Linienelemente durchgeführt derart, daß die in einer festen Richtung befestigten Parabeln Elementvereine werden, so erhält man konstruktiv die zweite Liesche Abbildung der nichtorientierten Linienelemente. *Burau* (Hamburg).

Meurice, L.: Sur les centres de courbure d'une conique. Mathesis 51, 409—412 (1937).

Kommerell, V.: Zur linken Seite einer Kegelschnittsgleichung. Deutsche Math. 2, 637 (1937).

Berichtigung zu dies. Zbl. 16, 270.

Browne, E. T., and C. A. Denson: The classification of correlations in the plane. Amer. Math. Monthly 44, 566—573 (1937).

Die Verff. geben eine Klassifikation der ebenen Korrelationen ohne Benutzung von Elementarteilern an. Ähnlich wie in Bochers „Höherer Algebra“ werden hierzu die beiden Kegelschnitte eingeführt, deren Linienelemente die zugeordneten Punkte und Geraden der Korrelation sind, die sich in vereinigter Lage befinden. Aus den verschiedenen gegenseitigen Lagen und der Ausartung dieser Kegelschnitte, die nur im Polaritätsfalle zusammenfallen, ergibt sich mittels einfacher Matrizenbetrachtungen (Zerlegung in symmetrischen und antisymmetrischen Teil) die gewünschte Klassifizierung.

Burau (Hamburg).

Dye, L. A.: An involutorial transformation determined by three pencils of planes. Tôhoku Math. J. 43, 174—177 (1937).

Two projective pencils of planes $|u|$ and $|v|$ are put into (1, 2) correspondence with a pencil of planes $|p|$ in involution. Through a general point P of the space passes a plane p to which there corresponds its conjugate \bar{p} and two planes u and v . The point P and the line $r = (u, v)$ determine a plane tangent at a point Q to the quadric surface generated by the line r . The line PQ meets p in a point P' which is the image of P in an involutorial transformation of order 7. This particular transformation and some generalizations are described. O. Zariski (Baltimore).

Berzolari, Luigi: Sulle tangenti comuni a due quadriche. II. Ist. Lombardo, Rend., III. s. 70, 300—316 (1937).

Fortsetzung und Schluß des im I. Teil der Abhandlung (dies. Zbl. 17, 84) angefangenen Beweises: Wenn zwei Quadriken F_1, F_2 eine kubische Raumkurve Γ gemein haben, so gibt es nicht mehr als ∞^1 Geraden, die F_1, F_2 in zwei verschiedenen Punkten gleichzeitig berühren und dem von Γ definierten linearen Strahlenkomplex angehören. Im § 4 wird der Fall betrachtet, wo F_2 ein Kegel ist und die Schnittlinie $F_1 F_2$ aus Γ und einer ihrer Tangenten besteht. Im § 5 sind F_1, F_2 zwei Kegel; die gesuchten Geraden bilden dann eine Regelfläche R 4. Ordnung; die Doppelkurve von R ist eine kubische Raumkurve Δ , die durch die Spitzen A, B der zwei Kegel hindurchgeht und in diesen Punkten dieselben Tangenten und Schmiegungsebenen wie Γ besitzt; die Ebenen durch AB schneiden noch Γ, Δ in zwei Punkten, deren Verbindungsgerade eine andere Regelfläche S 4. Ordnung beschreibt, für welche AB eine dreifache Gerade ist und deren asymptotische Kurven kubische Raumkurven sind usw. Ähnliche Eigenschaften hat man im § 6, wenn F_2 ein Kegel ist und die Schnittlinie $F_1 F_2$ aus Γ und einer ihrer Sehnen besteht. — Im § 7 beweist Verf., im Anschluß an eine frühere Untersuchung (dies. Zbl. 15, 173), daß die Geraden die zwei Quadriken F_1, F_2 gleichzeitig berühren, auch im Falle, wo die Schnittlinie $F_1 F_2$ einen irreduziblen Kegelschnitt als einfachen Teil enthält, in einem Hirschen Strahlenkomplex enthalten ist; der Beweis wird in verschiedene Teile eingeteilt, je nach der Form der übrigen Schnittlinie von F_1 und F_2 . E. G. Togliatti (Genova).

Lejeune, A.: Sur quelques congruences linéaires de cubiques gauches. I. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 6, 297—301 (1937).

Verf. betrachtet die Matrix $\begin{pmatrix} A_1, A'_1, a_1, a'_1, a''_1 \\ \dots\dots\dots \\ A_4, A'_4, a_4, a'_4, a''_4 \end{pmatrix}$, wobei die a lineare Formen

der Raumkoordinaten und die A Konstanten sind. Durch Nullsetzen aller 4reihigen Determinanten dieser Matrix erhält man eine Raumkurve 3. Ordnung. Je nachdem ob beide A -Spalten, eine A - und eine a -Spalte oder zwei a -Spalten von denselben 3 homogenen Parametern linear abhängig betrachtet werden, erhält man 3 Typen linearer C^3 -Kongruenzen, die auch geometrisch vom Verf. beschrieben werden als Gesamtheit von C^3 , die 2 weitere feste Raumkurven in einer gewissen Anzahl von Punkten treffen.

Bureau (Hamburg).

Srinivasiengar, C. N.: A note on harmonic curves. J. Indian Math. Soc., N. s. 2, 302—307 (1937).

Eine harmonische Kurve ist eine auf einer quadratischen Fläche liegende Kurve, dessen Tangenten zu einem linearen Komplex gehören. Sie hat eine Parameterdarstellung $x:y:z:w = t^{m+n}:t^m:t^n:1$, worin m und n positive ganze teilerfremde Zahlen sind. Das Doppelverhältnis der vier Ebenen, die vier feste Punkte einer harmonischen Kurve mit einer beliebigen Geraden einer Regelschar der die Kurve enthaltenden quadratischen Fläche verbinden, ist konstant. Verf. betrachtet die asymptotischen Kurven der Regelfläche $y^{m+n}w^{m-n} = z^{m+n}x^{m-n}$ ($m > n$), diese sind harmonische Kurven. Im besonderen untersucht er die Spezialfälle $y^{N-1}w = z^{N-1}x$, $y^{m+1}w^{m-1}$

$= z^{m+1}x^{n-1}$ und $y^{m+1}w^n = z^{m+1}x^n$. Weiter betrachtet er die asymptotischen Kurven der Fläche $x^{m-1}z + x^{m-2}yw = y^m$ (diese Fläche wird vom Verf. Cayleysche Regelfläche m -ter Ordnung genannt; im besonderen wird der Fall $m = 4$ untersucht) und der allgemeineren Fläche $x^{n-n}(zx + wy)^n = y^{m+n}$ (Spezialfälle $m = 1, n = 2; m = 3, n = 2$ und $m = 1, n = 3$). Auch diese asymptotischen Kurven sind harmonische Kurven. Schließlich gibt Verf. einige Eigenschaften der rationalen biquadratischen Raumkurve mit zwei Wendepunkten: $x:y:z:w = t^4:t^3:t:1$. Dieser Kurve ist eine kubische Regelfläche assoziiert, deren Gleichung $xz^2 - wy^2 = 0$ ist und die die Kurve als asymptotische Kurve enthält. Die Punkte der Kurve, deren Oskulations Ebenen durch einen Punkt der assoziierten kubischen Regelfläche gehen, geben, wenn sie mit einer Geraden der die Kurve enthaltenden quadratischen Fläche durch Ebenen verbunden werden, ein harmonisches Ebenenquadrupel, und man bekommt ein äquianharmonisches Ebenenquadrupel, wenn man die Punkte der Kurve, deren Oskulations Ebenen durch einen Punkt der die Kurve enthaltenden quadratischen Fläche gehen, durch Ebenen mit einer Geraden der die Kurve enthaltenden quadratischen Fläche verbindet.

G. Schaake (Groningen).

Waerden, B. L. van der: Zur algebraischen Geometrie. XI. Projektive und birationale Äquivalenz und Moduln von ebenen Kurven. Math. Ann. 114, 683—699 (1937).

The two plane curves Γ, Ω of order n are called improperly projective if the pair (Γ, Ω) is the limit (or a specialization) of a variable pair (Γ_t, Ω_t) of projectively equivalent curves, of order n . Explicit conditions are derived under which two given curves are improperly projective. From these conditions several consequences are drawn. Thus, a cubic curve with a cusp is improperly projective to any irreducible cubic. All the irreducible quartics with a tacnode are improperly projective to each other. This shows that improperly projective curves need not be even birationally equivalent. More important for the specific purpose of the paper is the following result: If Γ is an irreducible regular curve (that is a curve with only ordinary double points) improperly projective to Ω , then Ω necessarily possesses a point 0 of multiplicity $\geq n - 1$, whence Ω consists of k ($k \leq n$) lines through 0 and of a rational curve of order $n - k$ which has at 0 a $(n - k - 1)$ -fold point. These preliminary results are applied to the question of the moduli of an algebraic curve. First, following on the main Severi's treatment, it is proved that the regular curves of order n and genus p belong to a certain number of irreducible algebraic systems I_ν of dimension $3n + p - 1$ and that the general curve of each system I_ν is actually regular and of genus p . For any irreducible curve Γ of genus p and of order $n > 2p - 2$ it is proved that the curves Ω of order n birationally equivalent to Γ belong to one irreducible algebraic system \mathfrak{P}_Γ of dimension $3n - 2p + 2 - \varrho$ ($\varrho = 0$, if $p > 1$, $\varrho = 1$, if $p = 1$ and $\varrho = 3$, if $p = 0$) whose generic curve is actually birationally equivalent to Γ . The pairs (Γ, Ω) , $\Omega \in \mathfrak{P}_\Gamma$ and Γ any regular curve in I_ν , are all contained in an irreducible algebraic variety \mathfrak{B}_ν of pairs of curves, and the general element of \mathfrak{B}_ν is actually a pair of birationally equivalent curves. There ensues an algebraic correspondence \mathfrak{B} between I_ν and \mathfrak{B}_ν in which to a general Γ in I_ν there corresponds the image of the system \mathfrak{P}_Γ . As Γ varies in I_ν , the system \mathfrak{P}_Γ describes an irreducible algebraic system \mathfrak{M}_ν of subvarieties of \mathfrak{B}_ν (by a preceding result of van der Waerden and Chow, see this Zbl. 16, 40). By the principle of counting constants, applied to the correspondence \mathfrak{B}_ν , the dimension of \mathfrak{M}_ν , i. e. of the variety whose points P_Γ are the systems \mathfrak{P}_Γ , is $3p - 3 + \varrho$. The correspondence \mathfrak{B} defines a correspondence between I_ν and \mathfrak{M}_ν in which to each regular curve Γ in I_ν there corresponds a unique point P_Γ on \mathfrak{M}_ν , image of \mathfrak{P}_Γ . Now comes the essential part given by the theorem to the effect, that if a pair (Γ, Ω) of irreducible curves is the limit of a pair of birationally equivalent curves and if Γ is not rational and Ω is regular, then Γ and Ω are also birationally equivalent. This shows that in the above correspondence between I_ν and \mathfrak{M}_ν two regular curves in I_ν correspond to one and the same point of \mathfrak{M}_ν , if and only if they are birationally equivalent. Thus,

as far as the regular curves are concerned, \mathcal{M} , is a true algebraic model of the birationally distinct classes of algebraic curves of genus p . (X. see this Zbl. 16, 41.) *O. Zariski.*

Danielsson, Ólafur: Zur Bestimmung der Kurven algebraischer Flächen. Math. Ann. 114, 742—748 (1937).

In a preceding paper (this Zbl. 14, 329) the author investigated two types of rational surfaces F : (1) orientable surfaces F_1 which can be mapped birationally and homomorphically — without fundamental elements — upon a quadric surface, and which therefore can be mapped upon a plane carrying two fundamental points and a fundamental line; (2) non-orientable surfaces F_2 which can be mapped birationally upon a plane free from fundamental curves and in such a manner that the fundamental points in the plane impose independent conditions upon any algebraic curve constrained to pass through them with any preassigned multiplicities. In the present paper some numerical relations between the characters of the mapping are derived. If F has only a double curve, these formulas are due to Clebsch. — Given on F an algebraic curve Γ of order h , genus p and having s intersections with the multiple — f -fold — curve of F , it is found that the number of points necessary to determine the curve is $g = (f - 1)s - h(n - 4) + p - 1$, where n is the order of F . A similar formula is established for arbitrary rational surfaces. In particular, if Γ is a fundamental curve, it is found that $g = 0$, i. e. Γ is completely determined by the fundamental points which lie on it. It may be observed that this last result also follows a priori from the fact, that a fundamental curve on which the fundamental points have been assigned is an exceptional curve of the first kind, hence of virtual degree -1 .

O. Zariski (Baltimore).

D'Orgeval, B.: Sur une extension du principe de dégénérescence à la théorie des surfaces algébriques. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 25, 547—553 (1937).

According to Enriques, it is possible to develop the theory of linear series on an algebraic curve of genus p as a theory of linear series with p neutral pairs on a rational curve, these p neutral pairs being at the p double points which are considered as virtually non-existent. The present Note sketches a generalization of this method to the theory of algebraic surfaces. The underlying idea consists in this case in considering as virtually non-existent one of the components, say Γ_1 , of a composite curve $\Gamma_1 + \Gamma_2$ of double points of a given rational surface F_0 . One deals then with an hypothetic non-rational surface F admitting F_0 as a limiting case. The complete linear systems on F become, on F_0 , linear systems cut out by surfaces passing through Γ_2 and meeting Γ_1 in sets composed of pairs of an involution γ_2^1 on Γ_1 . By means of the plane representation of F_0 it is then possible to define directly in the plane the adjoint system, the canonical system and to reconstruct some of the well-known properties of these systems and of their numerical characters. Analogous considerations are developed for the case in which F becomes rational through the imposition of triple points.

O. Zariski (Baltimore).

Bydžovský, B.: Cas spécial de la transformation quadratique involutive dans l'espace à n dimensions. Mém. Soc. Roy. Sci. Bohême 1936, Nr 10, 1—8 (1937).

An involutorial quadratic transformation in S_n possesses a fundamental quadratic q_{n-2} and an isolated fundamental point O . The special case is treated in which O lies on q_{n-2} . It is found that the equations of the transformation can be put in the form

$$\varrho x'_i = x_i L(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, h;$$

$$\varrho x'_k - x_k L(x_1, \dots, x_n), \quad k = h + 1, \dots, n; \quad \varrho x'_{n+1} = Q(x_1, \dots, x_n) - x_{n+1} \bar{L}(x_1, \dots, x_n),$$

where L is a linear form, $\bar{L} = L(x_1, \dots, x_h, -x_{h+1}, \dots, -x_n)$ and Q is a quadratic form left invariant by the involutorial collineation $\varrho x'_i = x_i, i = 1, 2, \dots, h; \varrho x'_k = -x_k, k = h + 1, \dots, n$. In the general case when O is not on q_{n-2} , the quadratic transformation is always the product of an involutorial collineation and of an inversion.

In the special case such a decomposition of the transformation is possible if and only if O is a singular point of q_{n-2} .

O. Zariski (Baltimore).

Derwiduë, L.: Sur quelques transformations birationnelles hyperspatiales. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 23, 800—808 (1937).

In einem linearen r -dimensionalen Raume S_r sei eine birationale Transformation mit den Gleichungen $x'_0: x'_1: \dots: x'_r = \varphi_0(x_0, x_1, \dots, x_r): \varphi_1: \dots: \varphi_r$ gegeben; die φ_i sind algebraische Formen m -ter Ordnung. Ebenso sei in einem linearen s -dimensionalen Raume S_s eine birationale Transformation mit den Gleichungen $y'_0: y'_1: \dots: y'_s = \psi_0(y_0, y_1, \dots, y_s): \psi_1: \dots: \psi_s$ gegeben; die ψ_i sind algebraische Formen n -ter Ordnung. Man denke sich S_r und S_s derart in einem linearen $(r+s+1)$ -dimensionalen Raume S_{r+s+1} eingebettet, daß S_r und S_s sich nicht begegnen. Seien $\varphi(x_0, x_1, \dots, x_r)$ und $\psi(y_0, y_1, \dots, y_s)$ zwei algebraische Formen bzw. μ -ter und ν -ter Ordnung, und sei $m+\nu=n+\mu$. Dann bestimmen die Gleichungen

$$\frac{x'_i}{\psi_h(y_0, y_1, \dots, y_s) \varphi(x_0, x_1, \dots, x_r)} = \frac{y'_h}{\varphi_i(x_0, x_1, \dots, x_r) \psi(y_0, y_1, \dots, y_s)} \quad (i=0, 1, \dots, r; h=0, 1, \dots, s)$$

eine birationale Transformation, wenn $\mu=m-1, \nu=n-1$ oder $\mu=m+1, \nu=n+1$. Im besonderen untersucht Verf. den (involutorischen) Spezialfall $\frac{x'_0}{x_0\varphi} = \frac{x'_1}{x_1\varphi} = \dots = \frac{x'_r}{x_r\varphi} = \frac{y'_0}{y_0\psi} = \frac{y'_1}{y_1\psi} = \dots = \frac{y'_s}{y_s\psi}$, worin $\varphi(x_0, x_1, \dots, x_r), \psi(y_0, y_1, \dots, y_s)$ quadratische Formen sind. Wenn $r=s=1$ ist, bekommt man eine involutorische birationale Transformation im dreidimensionalen Raume, die den Ebenen kubische Flächen, welche einem Tetraeder umbeschrieben sind, zuordnet. Auch gibt Verf. eine ausführliche Betrachtung des Spezialfalles $\frac{x'_0}{x_1x_2} = \frac{x'_1}{x_2x_0} = \frac{x'_2}{x_0x_1} = \frac{y'_0}{y_0\varphi} = \dots = \frac{y'_s}{y_s\varphi}$, worin $\varphi \equiv a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2$. Wenn $s=0$ ist, bekommt man eine von Cremona gefundene Transformation, welche den Ebenen des dreidimensionalen Raumes Steiner'sche Flächen zuordnet und die quadratischen Flächen, die durch vier gegebene Punkte gehen und eine gegebene Ebene in einem gegebenen Punkte berühren, auf die Ebenen abbildet.

G. Schaaake (Groningen).

Keller, Ott-Heinrich: Über eine Kovariante bei Cremona-Transformationen. Math. Ann. 114, 700—741 (1937).

The purpose of the paper is the introduction and study of conveniently defined plane curves W (which the author calls Weierstrass curves), which are so related to a given plane curve f of genus p that the intersections of W and f include all the Weierstrass points of f . Moreover, these Weierstrass curves are to be covariant curves of f under Cremona transformations. The curves W are not uniquely determined, depending as they do upon a certain number of arbitrary parameters; these affect only the residual intersections of W and f , outside the Weierstrass points (among the residual intersections are the multiple points of f). Outside of the residual intersections there remain $(p+1)p(p-1)$ intersections at the Weierstrass points, each counted to a proper multiplicity. Of special interest are the considerations dealing with the type of singularity which a W possesses at a Weierstrass point P . It turns out that the singularity of W at P is affected by the distribution of the p gaps at P . For instance: if P is a simple point of f and if $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\alpha$ are the gaps at P which are not greater

than $p+1$, then $\sum_{\nu=1}^{\alpha} \lambda_\nu - \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}$ gives the number of linear branches of W at P

which are not tangent to f .

O. Zariski (Baltimore).

Schilling, C. G.: Some geometric applications of algebraic correspondences. Tôhoku Math. J. 43, 195—204 (1937).

If a symmetric (n, n) correspondence is given between two pencils of lines or between two line conics, curves of order $2n$ and $4n$ respectively are defined by the

correspondence. The singularities, the genus and the properties of the curves relative to the carriers of the correspondence are described. Special metric cases are also studied.

O. Zariski (Baltimore).

Differentialgeometrie:

Mitrinovitch, Dragoslav S.: Sur l'équation différentielle des lignes géodésiques des surfaces spirales. C. R. Acad. Sci., Paris 205, 1194—1196 (1937).

Mitrinovitch, Dragoslav S.: Un problème sur les lignes asymptotiques et la méthode de l'intégration logique des équations différentielles de M. Jules Drach. C. R. Acad. Sci., Paris 205, 1358—1360 (1937).

Auf eine von J. Drach behandelte Differentialgleichung der äußeren Ballistik werden zurückgeführt: 1. $y'^2 + y^2 = f(x)$ und 2. die Differentialgleichung der Asymptotenlinien gewisser Flächen $z = a_0 y^3 + a_1 y^2 + a_2 y + a_3$, wobei $a_0 = a_0(x)$, und die übrigen a_k bestimmte, durch Differentialgleichungen gegebene Funktionen von a_0 sind.

W. Feller (Stockholm).

Aimond, Fernand: Sur quelques propriétés des surfaces déduites de leurs significations mécaniques. C. R. Acad. Sci., Paris 205, 711—713 (1937).

Aimond, Fernand: Sur l'équilibre des surfaces convexes. C. R. Acad. Sci., Paris 205, 836—838 (1937).

Aimond, Fernand: Sur quelques propriétés des surfaces déduites des conditions d'équilibre des surfaces convexes. C. R. Acad. Sci., Paris 205, 948—950 (1937).

Mitteilung einer sehr großen Zahl von Sätzen, die sich auf das Gleichgewicht von berandeten oder geschlossenen Flächen unter der Einwirkung kontinuierlich verteilter Kräfte beziehen, und differentialgeometrische Anwendungen insbesondere auf konvexe Flächen und Verbiegbarkeitsfragen. Die Flächen S_1 werden hierbei als biegsam und undeformierbar vorausgesetzt und mit den Flächen zugleich ihre sphärischen Bilder S_2 betrachtet. Der (zum Teil schon von Maxwell bemerkte) enge Zusammenhang mit der Flächentheorie geht z. B. daraus hervor, daß die Gleichgewichtsbedingungen für spezielle Belastungen von S_1 oder S_2 in die Gauß-Codazzischen oder die Weingartenschen Gleichungen und der Spannungstensor in die zweite Fundamentalform übergehen. Von den Anwendungen seien hervorgehoben: die Sätze von Christoffel und Minkowski über die eindeutige Bestimmtheit einer konvexen Fläche durch die Summe bzw. das Produkt der Hauptkrümmungsradien als Funktion des sphärischen Bildes, Angabe eines Verfahrens zur Bestimmung sämtlicher Verbiegungen eines konvexen Flächenstücks. Ferner wird die Unverbiegbarkeit der konvexen Flächen in dem allgemeinen von Weyl angegebenen Sinne sogar für nichtanalytische Flächen behauptet. (Infolge der äußerst knappen Darstellung ist dem Ref. eine Nachprüfung nicht möglich gewesen. Eine eingehende Besprechung der umfassenden Untersuchung kann daher erst im Anschluß an eine ausführliche Publikation erfolgen.)

W. Fenchel.

Pères, Yvonne: Congruences déduites d'une pseudosphère. Mathesis 51, 361—366 (1937).

L'auteur envisage trois congruences rectilignées liées avec une pseudosphère. La première, Γ est congruence des tangentes aux géodésiques g , orthogonales à une géodésique g donnée sur la pseudosphère. L'auteur envisage quelques propriétés de la seconde nappe focale, Φ de cette congruence et démontre en outre que les tangentes dans un point arbitraire F de Φ aux lignes de Φ correspondentes aux lignes de courbure de la pseudosphère passent par les centres de courbure principaux C_1 et C_2 du point correspondant de la pseudosphère. La seconde congruence Γ_1 est formée par les droites FC_1 . L'auteur établit quelques propriétés de la seconde nappe focale Φ , de cette congruence. La troisième Γ_2 est la congruence des tangentes à une famille de géodésiques parallèles entre elles sur la pseudosphère. L'auteur montre que Γ_2 n'est que le cas particulier de Γ .

Nil Glagoleff (Moscou).

Burstin, C.: Ein Beitrag zur Theorie des Klassenbegriffes der quadratischen Differentialformen. (1. internat. Konferenz f. tensorielle Differentialgeometrie u. ihre Anwendungen, Moskau, Sitzg. v. 17.—23. V. 1934.) Abh. Semin. Vektor- u. Tensoranalysis usw., Moskau Liefg 4, 121—136 (1937).

The main results of the first part of this paper are described in this Zbl. 4, 416 [Burstin, C.: „Zum Einbettungsproblem“; compare with the results by T. Y. Thomas (this Zbl. 15, 273), who succeeded in establishing a complete algebraic characterization of a Riemann space of class one of the type ≥ 3]. In the second part the author investigates the largest possible dimension h of a family of ametric spaces F_h in a Riemann space V_n and finds the inequalities $p \leq h \leq E\left(\frac{n}{2}\right)$, where

$$p \leq E\left(\frac{-1 + \sqrt{8n-7}}{2}\right).$$

Hlavatý (Princeton, U. S. A.).

Hoborski, A.: Bericht über eine mit Herrn St. Golab veröffentlichte Arbeit und Stellung eines neuen Problems. (1. internat. Konferenz f. tensorielle Differentialgeometrie u. ihre Anwendungen, Moskau, Sitzg. v. 17.—23. V. 1934.) Abh. Semin. Vektor- u. Tensoranalysis usw., Moskau Liefg 4, 354—356 (1937).

If k is the first of the Frenet curvatures k_1, \dots, k_m of a curve C in a Riemann space V_n , which is equal to zero, then the osculating m -vector field $v_{(m)}$ of C can be completed to an n -vector field $v_{(n)}$ in such a way that the $(n-m)$ -vector field which completes $v_{(m)}$ to a $v_{(n)}$ is orthogonal to $v_{(m)}$ and consists of parallel $(n-m)$ -vectors along C (this Zbl. 9, 131).

Hlavatý (Princeton, U. S. A.).

Davies, E. T.: On the second and third fundamental forms of a subspace. J. London Math. Soc. 12, 290—295 (1937).

Using the results of his foregoing paper (this Zbl. 15, 177) the author considers special cases in which v^p is either normal or tangential to the V_m . In the first case he gets the Bompiani formula [Atti Ist. Veneto 80, 1113—1145, p. 1132 (1921)] for the normal deformation of ds^2 (which is a generalization of the well known formula by Bianchi) and the Bortolotti “normal curvature associated with a congruence” [Giorn. di Mat. 66, 153—186, eq. 138 (1928)]. In the second case he obtains Bortolotti’s “angular form” [Rend. Ist. Lombardo (2) 64, 441—463, p. 459 (see this Zbl. 2, 288)].

Hlavatý (Princeton, U. S. A.).

Cartan, E.: Les espaces de Finsler. (1. internat. Konferenz f. tensorielle Differentialgeometrie u. ihre Anwendungen, Moskau, Sitzg. v. 17.—23. V. 1934.) Abh. Semin. Vektor- u. Tensoranalysis usw., Moskau Liefg 4, 70—81 (1937).

The author points out the main facts of his treatment of Finsler’s space, which are elaborated in detail in his book “Les espaces de Finsler” (Paris: Hermann 1934; this Zbl. 8, 418).

Hlavatý (Princeton, U. S. A.).

Nazim, Ahmet: Über Finslersche Räume. München: Diss. 1936. 56 S.

In order to get the metric invariant notions (including the Frenet formulas and the parallel displacement) along a given curve Γ in a Finsler space F_n , author considers first a Riemann space V_n which osculates F_n along a family of curves in F_n , containing Γ and gets in this way the invariants mentioned above. He proves then, that these notions are independent of any choice of the family of curves mentioned above (provided that any such family contains Γ) and accordingly they are characteristic for the Finsler space F_n . — Moreover the impossibility of the conformal mapping of F_n on a V_n is proved and the main results of the theory of a V_m in V_n are established also for a F_m in F_n (including the “theory of surface”, i. e. $m = 2, n = 3$). [Note: The assumption $D\varphi = d\varphi$ (p. 11) follows from the remaining assumptions II, III, IV p. 11. Ref.] Hlavatý.

Craig, H. V.: On tensors relative to the extended point transformation. Amer. J. Math. 59, 764—774 (1937).

The "extended point transformation"

$$x^r = x^r(y), \quad \frac{d}{dt} x^r = \frac{\partial x^r}{\partial y^i} \frac{d}{dt} y^i, \quad \frac{d^2}{dt^2} x^r = \frac{\partial x^r}{\partial y^i} \frac{d^2}{dt^2} y^i + \frac{\partial^2 x^r}{\partial y^i \partial y^j} \frac{d}{dt} y^i \frac{d}{dt} y^j, \\ \frac{d^M}{dt^M} x^r = \frac{\partial x^r}{\partial y^i} \frac{d^M}{dt^M} y^i + \dots$$

serves as a base for the definition of "extensors". So for instance, if

$$\bar{T}^{\alpha\tau} = T^{\tau i} X_{(\gamma)i}^{(\alpha)\tau} \quad (1)$$

(where

$$X_{(\gamma)i}^{(\alpha)\tau} = \frac{\partial \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} x^\tau}{\frac{d^\gamma}{dt^\gamma} y^i},$$

then $T^{\tau i}$ are components of an extensor, excontravariant of order one. The contraction may be here defined as in an ordinary tensor algebra. Because $X_{(\gamma)i}^{(\alpha)\tau} = 0$ for $\alpha < \gamma$ then the set of components $\bar{T}^{\alpha\tau}$ in (1) with $\alpha \leq a$ depends only on $T^{\tau i}$ with $\gamma \leq a$ and is referred to as an extensor of reduced range. The contraction of extensors over a reduced range may be also defined. This theory is illustrated by means of different extensors, which occur in the literature. (See for instance Craig, this Zbl. 1, 167; 11, 176; 15, 127; Kawaguchi, this Zbl. 8, 33; 15, 275; Synge this Zbl. 12, 88.)

Hlavatý (Princeton, U. S. A.).

Topologie:

● Stollow, S.: Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques. (Collect. de monogr. sur la théorie des fonet. Publié par Émile Borel.) Paris: Gauthier-Villars 1937. X, 148 pag. Frs. 60.—

Das Problem der Klarlegung der topologischen Bestandteile in der Theorie der analytischen Funktionen hat verschiedene Seiten und ist im Laufe der letzten Jahrzehnte von verschiedenen Gesichtspunkten aus in Angriff genommen worden. Als Beispiel ist die präzise Bestimmung des Begriffes der Riemannschen Fläche durch Weyl und Radó zu nennen. Eine andere Zuspitzung war das Brouwersche Problem der topologischen Charakterisierung der konformen Abbildungen, also die Frage nach den genauen Bedingungen, unter denen eine Transformation mit einer konformen Abbildung homöomorph ist. Durch seinen Begriff der „Regularität“ einer Abbildung, welcher für geschlossene Flächen topologisch invariante Bedeutung hat, löste v. Kerékjártó dieses Problem für geschlossene Flächen (s. zus.fass. Bericht in Enseign. math. 1936, dies. Zbl. 16, 44). Einen anderen Weg zur Lösung fand Stoilow in einer Reihe von Arbeiten in seinem Begriff der „transformation intérieure“, und hierin gipfelt auch die systematische Darstellung des vorliegenden Buches in den Kapiteln 5 und 6, nachdem in den Kapiteln 1—4 eine breite Grundlage von meistens bekannten Tatsachen in gut lesbarer Darstellung bereitgestellt worden ist. — Das erste Kapitel bringt den Begriff des topologischen Raumes mit verschiedenen äquivalenten Axiomensystemen und führt die üblichen mengentheoretischen Grundbegriffe ein. Nach Erläuterung der Begriffe der stetigen Abbildung eines topologischen Raumes in oder auf einen anderen, der topologischen Abbildung, des euklidischen Raumes und der Mannigfaltigkeit wird, wesentlich im Anschluß an den Beweisgang E. Sperrers, das Lebesguesche Lemma und der Brouwersche Satz von der Invarianz des Gebietes und der Dimensionenzahl bewiesen. — Im zweiten Kapitel wird eine stetige Abbildung einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit V in eine andere V_0 als „Riemannsche Überlagerung“ erklärt, wenn V durch endlich oder abzählbar viele in V kompakte abgeschlossene Gebiete überdeckt werden kann, in deren jedem die Abbildung mit der durch $w = z^n$ gegebenen Abbildung zweier Kreisscheiben aufeinander topologisch äquivalent ist (n ganz und vom Gebiet abhängig). Wenn dann V_0 die komplexe Zahlenkugel ist, so heißt die Überlagerung eine „Riemannsche Fläche“ und V ihr „topologisches Modell“. Durch Übertragung der Metrik der Zahlenkugel auf V wird nun auf der Riemannschen Fläche der Begriff der analytischen Funktion durch Potenzreihen erklärt. Dann wird gezeigt, daß nicht nur zu jeder vorgegebenen analytischen Funktion in diesem Sinne eine Riemannsche Fläche gehört (deren Modell natürlich nur bis auf Homöomorphie bestimmt ist), sondern auch sich zu jeder im obigen Sinn gegebenen Riemannschen Fläche eine zugehörige analytische Funktion bestimmen läßt (Weyl, Courant, Fatou). Der Fall der Endlichkeit des obigen Gebietssystems führt zu geschlossenen Riemannschen Flächen und zu algebraischen Funktionen. —

Das dritte Kapitel kennzeichnet die Stellung der Riemannschen Flächen unter allen zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten durch die Eigenschaften der Triangulierbarkeit und der Orientierbarkeit. Für Leser, die im Gestaltenreichtum der Topologie nicht bewandert sind, werden Beispiele von nichttriangulierbaren und von nichtorientierbaren Mannigfaltigkeiten gegeben, die infolgedessen nicht Modell Riemannscher Flächen sein können. — Das vierte Kapitel enthält zunächst die Typeneinteilung der geschlossenen orientierbaren Flächen und ihre Zerschneidung in schlichte Gebiete (Jordanscher Homöomorphiesatz). Sodann für offene orientierbare Flächen die Begriffe des Grenzelements und der approximierenden Polyederflächen und den Kerékjártó'schen Homöomorphiesatz. — Die beiden letzten Kapitel gruppieren sich, wie schon oben erwähnt, um den Begriff der „transformation intérieure“; das sind stetige Flächenabbildungen, die offene Mengen in offene Mengen überführen und kein Kontinuum in einen Punkt abbilden. Die von einer analytischen Funktion geleistete Abbildung ihrer Riemannschen Fläche auf die komplexe Zahlenkugel ihrer Werte hat die beiden genannten Eigenschaften; und keine dieser beiden Eigenschaften reicht für sich allein aus, um die analytischen Funktionen topologisch zu charakterisieren; das alles ist sofort einzusehen. Daß aber die beiden Eigenschaften zusammen die analytischen Funktionen topologisch charakterisieren, wird nun der Hauptsatz. Da topologische Abbildungen spezielle Fälle von transformations intérieures sind und zwei t. i. hintereinander ausgeführt wieder eine t. i. ergeben, kommt es darauf an zu zeigen, daß man mittels analytischer Funktionen und topologischer Abbildungen jede t. i. zusammensetzen kann. Der Hauptteil des Beweises besteht darin zu zeigen, daß eine t. i. lokal umkehrbar ist und dabei in der Umgebung eines Punktes entweder topologisch ist oder den Charakter eines algebraischen Verzweigungspunktes hat. Man kann den Zusammenhang auch so kennzeichnen: Aus der Abbildbarkeit einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit auf die Kugelfläche oder einen Teil derselben mittels einer t. i. folgt die Triangulierbarkeit und Orientierbarkeit der Mannigfaltigkeit. Abschließend werden einige Anwendungen auf Fragen der Funktionentheorie gemacht: Abbildungsgrad, Erweiterung der Verzweigungsformel von Hurwitz, Nullstellen der Funktion und ihrer Ableitung, asymptotische Werte und Ausnahmewerte.

Jakob Nielsen (Kopenhagen).

Mechanik.

Schürer, M.: Über die theoretische und praktische Festlegung eines Inertialsystems. *Astron. Nachr.* 264, 81—98 (1937).

Pendse, C. G.: A note on the definition and determination of mass in Newtonian mechanics. *Philos. Mag.*, VII. s. 24, 1012—1022 (1937).

Mach defined mass in terms of Newton's second and third laws of motion. The author enquires: Given an isolated system containing more than two particles, will it be possible for an observer to determine the ratios of the masses of the particles by observing their motions? It is shown that this is not possible if the system contains more than seven particles, if the observer can observe accelerations at as many instants as he chooses, or more than four particles, if he observes the accelerations at one instant only.

Whittaker (Edinburgh).

● Bouligand, Georges: Précis de mécanique rationnelle à l'usage des élèves des facultés des sciences. Avec un choix de problèmes proposés à la licence et à l'agrégation et rédigés avec la collaboration de Jean Dollon. 2. edit. Paris: Libr. Vuibert 1937. VIII, 342 pag. Frcs. 60.—

I. Théorie des vecteurs. II. Cinématique. III. Géométrie des masses et cinétique. (Eingleitende Kapitel, die die für die Mechanik unerlässlichen Dinge aus diesen Gebieten enthalten.) IV. Principes et théorèmes généraux de la dynamique. Applications au corps solide. (Grundbegriffe, Schwerpunkts- und Momentsatz. Anwendung auf die Aufstellung der Bewegungsgleichungen des starren Körpers.) V. Éléments de dynamique analytique. (Vorbemerkungen über Variationsrechnung und Riemannsche Räume. Hamiltonsches Prinzip und Lagrangesche Gleichungen für holonome Systeme. Bemerkungen über nichtholonome und einseitige Bindungen. Berechnung der Reaktionskräfte.) VI. Cas usuels d'intégration. Stabilité. Petits mouvements. Principe de la moindre action et applications. VII. Chocs et percussions. VIII. Problèmes de dynamique sans frottement. (Eine Sammlung von Beispielen, nach der Anzahl der Freiheitsgrade geordnet, neben einigen prinzipiell wichtigen und geläufigen zu meist Examensaufgaben. Diese wie auch die in die übrigen Kapitel eingestreuten Beispiele sind vollständig durchgerechnet, und es wird besonders auf die qualitative Diskussion der Ergebnisse, Verlauf der Bahnkurven usw. Gewicht gelegt.) IX. Compléments de dynamique analytique. (Über die Integration in gewissen Fällen zeitabhängiger Bindungen nach Painlevé.

Einleitung in die Hamilton-Jacobische Theorie. Über den Verlauf der Bahnkurven im großen im Sinne der Untersuchungen von Hadamard. Hinweise auf die Bedeutung der topologischen Eigenschaften des Konfigurationsraumes.) X. Notions de mécanique des fils. (Gleichgewicht und Bewegung von Fäden. Schwingende Saiten. Dieses und das folgende Kapitel sind in der vorliegenden 2. Auflage hinzugefügt worden.) XI. Indications sur la mécanique des fluides. (Aufstellung der Bewegungsgleichungen. Spezialisierung und Anwendung auf Hydrostatik, Schallwellen, Schwingungen einer Flüssigkeit in einem Bassin.) Note I. La notion de temps, les conceptions relativistes. Note II. Moment cinétique et moment dynamique (von Lainé, vgl. dies. Zbl. 11, 134). Note III. Solution d'un Problème d'agrégation. (Detaillierte Untersuchung der Bewegung eines starren Körpers, von dem ein Punkt an eine vertikale Gerade und eine Gerade an eine horizontale Ebene gebunden ist, unter der Einwirkung der Schwerkraft.) W. Fenchel (Kopenhagen).

Arrighi, Gino: *Le vibrazioni forzate nei corpi elastici isotropi*. Ist. Lombardo, Rend., III. s. 70, 335—339 (1937).

Lösung des allgemeinen Problems der erzwungenen Schwingungen isotroper elastischer Mittel unter dem Einfluß von Massenkräften vom allgemeinsten Typus und beliebig mit der Zeit veränderlich. Die Massenkräfte können in der Form

$$\mathfrak{F} = \text{grad}\varphi + \text{rot}l$$

dargestellt werden. Es wird gezeigt, daß die elastische Verschiebung in derselben Form

$$\mathfrak{s} = \text{grad}\varphi + \text{rot}u$$

angesetzt und das Problem auf ein System von zwei Gleichungen für die beiden unbekannten Funktionen φ und u zurückgeführt werden kann. Ihre Auflösung enthält drei retardierte Potentiale und stellt eine Verallgemeinerung der Kirchhoff-Poisson'schen Formel dar.

Th. Pöschl (Karlsruhe).

Arrighi, Gino: *Sul problema generale dell'impulso nei corpi elastici isotropi*. Ist. Lombardo, Rend., III. s. 70, 358—362 (1937).

Mittels eines einfachen Kunstgriffs werden für das Impulsproblem in einem elastischen isotropen Körper Ergebnisse abgeleitet, die den in der vorhergehenden Note über erzwungene Schwingungen erhaltenen genau entsprechen. Dieser Kunstgriff besteht in der Transformation $\mathfrak{F} = e'f$, $\mathfrak{s} = e'b$.

Dann erhält man die Impulsgleichung, die schon früher von F. Conforto [Rend. Accad. Lincei 15 (1932); dies. Zbl. 5, 31] aufgestellt wurde. f bedeutet den Stoß und b den Vektor der zugehörigen Geschwindigkeitsänderung. Für die Integration wird derselbe Weg eingeschlagen wie in der vorhergehenden Note, der auch zu ähnlichen Formeln für die Lösung führt.

Th. Pöschl (Karlsruhe).

Analytische Mechanik, Ergodenprobleme:

De Franchis, F.: *Vincoli e reazioni nel più generale schema Lagrangiano*. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 25, 704—709 (1937).

Wird ein System nichtholonomen Bedingungen unterworfen, die in den Geschwindigkeiten nichtlinear sind, so versagt bekanntlich das Prinzip der virtuellen Verrückungen, während man das Prinzip des kleinsten Zwanges anwenden kann. Die Note beschäftigt sich mit der Berechnung der Zwangskräfte als Funktionen der Koordinaten, der Geschwindigkeiten und der Zeit.

Wintner (Baltimore).

Lopshitz, A.: *Nichtholonome Systeme im mehrdimensionalen euklidischen Raume*. (I. internat. Konferenz f. tensorielle Differentialgeometrie u. ihre Anwendungen, Moskau, Sitzg. v. 17.—23. V. 1934.) Abh. Semin. Vektor- u. Tensoranalysis usw., Moskau Liefg 4, 302—317 (1937).

The author regards a set of r non-holonomic conditions of constraint in n variables as conditions of orthogonality in a Euclidean n -space between a displacement and r vectors of condition. At each point the vectors of condition define an r -space of conditions (C): the $(n - r)$ -space orthogonal to it is the space of motion (B). To each of these spaces there corresponds a linear operator (C, B resp.) such that, if x is any vector, then Cx and Bx are its orthogonal projections on C and B . These

operators are affinors or tensors whose components vary from point to point. If C_{jk} are the components of C and ξ_i rectangular Cartesian coordinates, then $C'_{jkl} = \partial C_{jk} / \partial \xi_l$ is an affnor or tensor: this the author denotes by C' , and writes $C'x|y$ for $C'_{jkl}x_k y_l$, x and y being any vectors. B' is similarly defined. The holonomicity affnor M is defined by $Mxy = C'Bx|By - C'By|Bx$. The space of any affnor at a point consists of the totality of vectors obtained by applying the affnor to arbitrary vectors. Since the conditions of holonomicity are $Mxy = 0$ (this Zbl. 12, 317), the space of M vanishes in the case of holonomicity: in general it is contained in C . — The first problem investigated by the author is that of finding the maximal holonomic system contained in C , that is, the subspace C_1 of greatest dimensionality contained in C , such that the conditions imposed by orthogonality to C_1 are holonomic. He shows that C_1 must be orthogonal to the space of M , so that if the space of M coincides with C , C_1 cannot exist: the system is then completely non-holonomic. If M does not fill C , then C_1 must be contained in the part of C orthogonal to M , say D . The space in which C_1 must be contained is further reduced by repetition of this process, using, instead of C and M , D and its holonomicity affnor, and so on. In this way he is led in a finite number of steps to the required C_1 . In particular, a necessary condition that C_1 should be of one dimension less than C is that M should reduce to a single vector. He also gives for the determination of C_1 a process based on the recurrence formulae

$${}^0 Bx = Bx,$$

$${}^{i+1} Bx_1 \dots x_{2^i} y_1 \dots y_{2^i} = {}^i Bx_1 \dots x_{2^i} {}^i \Phi y_1 \dots y_{2^i} \\ + {}^i B'x_1 \dots x_{2^i} | {}^i B y_1 \dots y_{2^i} - {}^i B'y_1 \dots y_{2^i} | {}^i Bx_1 \dots x_{2^i},$$

which define a sequence of affinors: Φ is an arbitrary scalar polylinear function. The space of ${}^{i+1} B$ includes that of ${}^i B$, and he shows that C_1 is the space orthogonal to the space of ${}^i B$, where k is the least value of i for which the rank of ${}^{i+1} B$ is equal to the rank of ${}^i B$, i.e. their spaces are of the same dimensionality. — The second problem discussed is that of finding a completing space \tilde{C} orthogonal to C , such that the conditions of orthogonality to C and \tilde{C} are holonomic. Particular attention is given to the case where \tilde{C} consists of a single vector.

J. L. Synge (Toronto).

Himmelsmechanik, Gleichgewichtsfiguren:

Rein, Natalie: Sur la méthode d'évaluation de la période de la solution du problème restreint des trois corps. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 16, 295—298 (1937).

Im Anschluß an Überlegungen von E. T. Whittaker [Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 62, 346—352 (1902)] werden formale Betrachtungen angestellt, die eine näherungsweise Abgrenzung der Periodenwerte betreffen. Die sich an den Whittakerschen Ansatz anschließende mathematische Literatur [vgl. insb. G. D. Birkhoff, Trans. Amer. Math. Soc. 18, 199—300 (1917)], die auch Existenz- und Unitätsbeweise erbracht hat, scheint der Verf. entgangen zu sein.

Wintner (Baltimore).

Kopal, Zdeněk: The orbits about an oblate spheroid. Čas. mat. fys. 67, 67—75 (1937).

Verf. diskutiert die hauptsächlich Perihelstörung eines Aufpunktes, der sich (in nicht allzu kleiner Entfernung) im Newtonschen Gravitationsfeld eines abgeplatteten

inhomogenen Spheroids bewegt. Da das Feld nicht radialsymmetrisch ist, so hängt die Störung auch von der jeweiligen Bahnneigung ab. *Wintner* (Baltimore).

Fabre, Hervé: Sur les déplacements des nœuds et des apsides dans les systèmes planétaires. C. R. Acad. Sci., Paris 205, 1042—1044 (1937).

Ausgehend von zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung für $\mu = \sin \varphi$ und $s = 1/r$ (φ = Breite, r = heliozentrischer Abstand) mit der Hansenschen Länge ν als unabhängiger Veränderlichen werden die Säkularstörungen der Exzentrizitäts- und der Neigungsveränderlichen bestimmt, soweit sie von der ersten Ordnung der störenden Masse sind. Nach dem Vorgange von Gauß werden die störenden Massen durch ringförmige Massenverteilungen ersetzt. *Klose* (Berlin).

Piotrowski, S.: A modified Russell-Fetlaar method of determining orbits of eclipsing binaries. Acta Astron., Sér. a 4, 1—24 (1937).

Verf. gibt eine Methode zur Bahnbestimmung von Bedeckungsveränderlichen (bei totalen, ringförmigen und partiellen Bedeckungen gleich brauchbar), bei der als Grundlage die Zeiten benutzt werden, zu denen der Lichtverlust 0,20, 0,25, 0,30, ... 0,95 des Maximalen beträgt (die anderen Werte wurden ausgeschlossen, da sie sich meist nicht scharf genug bestimmen lassen). Durch eine geeignete Gewichtsverteilung erreicht er eine Art Ausgleichung. Erleichtert wird die Rechnung noch durch 4 Tabellen. Zwei durchgerechnete Beispiele zeigen, daß die Berechnung der Bahn ziemlich rasch und sicher ist. Schließlich ist es dabei nicht schwer, auf eine etwa vorhandene Ellipsoidgestalt der Sterne Rücksicht zu nehmen. *G. Schrutka* (Wien).

Mathematische Physik.

Optik:

● **Carathéodory, C.:** Geometrische Optik. (Erg. d. Math. u. ihrer Grenzgeb. Hrsg. v. d. Schriftleitung d. Zbl. f. Math. Bd. 4, H. 5.) Berlin: Julius Springer 1937. 104 S. u. 11 Fig. RM. 9.90.

In this book the general theory of geometrical optics is developed, no attention being paid to questions of technical interest. In that respect it follows the spirit of Hamilton, and the reader will naturally compare the author's methods with those of Hamilton in geometrical optics [cf. Mathematical Papers of W. R. Hamilton, 1 (1931); this Zbl. 2, 85]. Formally they differ considerably, because the author uses, instead of Hamilton's optical methods, the methods familiar in dynamics in connection with the Hamilton-Jacobi theory. In attempting to throw optics into dynamical form, one is faced with the difficulty of finding in optics the proper analogue of dynamical time. This difficulty the author overcomes by sacrificing formal spatial symmetry: he denotes the three spatial coordinates by t, x_i ($i = 1, 2$), and lets t play the part of dynamical time. The optical length of a curve may be written $\int L(t, x_i, \dot{x}_i) dt$, where $\dot{x}_i = dx_i/dt$, this Lagrangian function L depending on the optical properties of the medium, e.g. $L = n(t, x_i)(1 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)^{\frac{1}{2}}$ for an isotropic heterogeneous medium. He defines canonical direction-coordinates (the momenta of dynamics) by $y_i = \partial L / \partial \dot{x}_i$, and the Hamiltonian function of a medium by $H(t, x_i, y_i) = -L + y_1 \dot{x}_1 + y_2 \dot{x}_2$. The principle of Huygens (which he prefers to Fermat's principle as a basic hypothesis) leads him to the Hamilton-Jacobi equation $\partial S / \partial t + H(t, x_i, \partial S / \partial x_i) = 0$, S being the time at which a wave passes through the point t, x_i , and the equations of the rays take the familiar canonical form of dynamics. The author does not point out the simple connections between his development and Hamilton's optics: his $L dt$ is Hamilton's $v ds$ (v is invariant, L not so); his y_i are the first two of Hamilton's components of normal slowness σ, τ ; his H is simply $-\nu$, where ν is the third component of normal slowness, expressed as a function of σ, τ and the spatial coordinates x, y, z , by virtue of the medium-equation $\Omega = 0$; his Hamilton-Jacobi equation is one of Hamilton's equations for the characteristic V , expressed in the form $\partial V / \partial z - \nu(x, y, z, \partial V / \partial x, \partial V / \partial y) = 0$. — For a set of rays given by $x_i = \xi_i(t, u_\alpha)$, $y_i = \eta_i(t, u_\alpha)$, where u_α ($\alpha = 1, \dots, m$) are parameters, constant along each ray, each Lagrange bracket $[u_\alpha, u_\beta] = \frac{\partial(\xi_1, \eta_1)}{\partial(u_\alpha, u_\beta)} + \frac{\partial(\xi_2, \eta_2)}{\partial(u_\alpha, u_\beta)}$ is constant along each ray, and remains unchanged at reflection or refraction. The invariance of the Lagrange bracket occupies a central position in the author's theory. This does not occur in Hamilton's method, because the invariance of the Lagrange bracket is merely a complicated alternative to the invariance (immediately

obvious in Hamilton's theory) of $\int(\sigma dx + \tau dy + \upsilon dz)$, taken round a tube of rays. Following the ideas of Bruns, the author considers an optical instrument as an agent transforming a congruence of rays into a congruence of rays, with conservation of Lagrange brackets. This leads to the result that if a ray, crossing $t = \text{const}$ in the initial medium at a point x, y with "momenta" ξ, η , crosses $t' = \text{const}$ in the final medium at a point x', y' with "momenta" ξ', η' then $\xi' dx' + \eta' dy' - \xi dx - \eta dy = d\Psi$, a perfect differential. Hence he proceeds to discuss the eikonals generating the transformation. He does not point out that the existence of the perfect differential above is an immediate consequence of Hamilton's fundamental equation of the characteristic function. Indeed he claims to draw a sharp distinction between eikonals and characteristic functions, a distinction which does not appear real to the reviewer. Later (p. 66) he writes: "Doch ist die Handhabung des Hamiltonschen Apparates unnötig kompliziert. Nicht nur hängen seine charakteristischen Funktionen von mehr Veränderlichen ab als die entsprechenden Eikonale, sondern der große Vorteil, den die Theorie des vorigen Kapitels bietet, und der darin besteht, daß diese Theorie ganz unabhängig von der Gestalt der Hamiltonschen Funktionen H und H' ist, geht hier verloren." It is true that Hamilton's V is a function of six variables, but since only intersections with two given surfaces are considered in the transformation theory, two of these variables are suppressed, and the number of independent variables is four, as for the eikonal. Moreover, on account of the restriction to points on fixed surfaces, the partial differential equations satisfied by V are not involved: a transformation theory based on boundary values of Hamilton's V , or other characteristic function, appears to the reviewer to be quite as general as that given in the book, and to offer certain advantages in simplicity of conception. — The author gives a very complete discussion of eikonals, including not only those of the forms $E(x, y, x', y')$, $V(\xi, \eta, x', y')$, $V'(x, y, \xi', \eta')$, $W(\xi, \eta, \xi', \eta')$, but also skew-eikonals such as $U(x, \eta, x', y')$. An eikonal applicable to a given system must contain four variables capable of independent variation; various singular cases are discussed. He shows that in a system with rotational symmetry at least one of E, V, V', W is applicable, and obtains the most general forms for these functions, for example, $E = E(a, b, c) + \lambda \tan^{-1}(y/x)$, where $a = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $b = xx' + yy'$, $c = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2)$, $\lambda = \text{constant}$. The fact that E is multiple-valued is surprising. — Space does not permit more than mere mention of the contents of the last two chapters: they deal with coupled optical spaces, where the transformations are no longer restricted to intersections with surfaces and perfect optical instruments are discussed, and with the first-order theory of rays in homogeneous isotropic media. — Although the reviewer feels that Hamilton's methods are in some respects to be preferred to those of the author, the book gives a clear self-contained development of the theory of geometrical optics, particularly likely to be of interest to those already familiar with the parallel dynamical theory.

J. L. Synge (Toronto).

Buchwald, Eberhard: *Klassische Optik*. Physik i. regelm. Ber. 6, 15—31 (1938).

Renninger, M.: *Überlegungen zur Interferenztheorie*. Z. Kristallogr. A 97, 95—106 (1937).

Zunächst wird gezeigt, daß das Reflexionsvermögen von Kristallen im unsymmetrischen Falle (Kristalloberfläche und Netzebenen bilden den Winkel φ) von diesem Winkel φ abhängt und eine einfache Funktion der Größe $\tan \varphi / \tan \theta_0$ ist, wobei θ_0 der Braggwinkel ist. Für den Idealkristall wird eine richtige Deutung von Versuchsergebnissen angebahnt. Eine zweite Studie betrifft eine notwendige Verfeinerung der gebräuchlichen Formeln für das Reflexionsvermögen als Funktion des Strukturfaktors.

E. Weber (New York).

Riedl, H.: *Die Bildfehler 3. Ordnung der kurzen schwachen rein elektrischen Elektronen-Einzellinse*. Z. Physik 107, 210—216 (1937).

Für die rein elektrische Elektronenlinse werden die bekannten Ausdrücke für die Bildfehler dritter Ordnung vereinfacht, unter der Annahme, daß die Linse „kurz“ (Ausdehnung klein gegen Brennweite) und „schwach“ (prozentuale Änderung des Potentials gering) ist. Für den paraxialen Strahlengang werden einfache Näherungsausdrücke eingesetzt. Die Bildfehler können dann dargestellt werden durch Integrale, die nur das Achsenpotential und seine Ableitungen enthalten.

Recknagel.

Ewald, P. P.: *Zur Begründung der Kristalloptik. IV.: Aufstellung einer allgemeinen Dispersionsbedingung, insbesondere für Röntgenfelder*. Z. Kristallogr. A 97, 1—27 (1937).

Unter der Annahme eines völlig periodischen Kristallgitters, bestehend aus elektrisch polarisierbaren Dipolen, wird eine fast strenge allgemeine Dispersionsbedingung für homogene, ebene, elektromagnetische Wellen abgeleitet, deren Diskussion eine theoretische Beschreibung (im Sinne der dynamischen Interferenztheorie) einiger Eigen-

arten der Fortpflanzung von Röntgenstrahlen in Kristallen gestattet. Zu diesem Zwecke wird zunächst das Dipolfeld der Kristallstruktur mit Hilfe des Hertzischen Potentials gebildet und als ebene Welle ausgedrückt, wobei sich Gelegenheit ergibt, die elektrische Polarisation einzuführen und das gesamte elektrische Moment einer Zelle des Kristalles zu formulieren. Als Vereinfachung, besonders für Röntgenstrahlen gültig, lassen sich die dabei auftretenden Summen auf die „starken“ Glieder beschränken, d. h. auf jene Glieder, deren Amplituden Resonanzhöchstwerte aufweisen; damit ergibt sich dann ein linear homogenes Gleichungssystem für diese Strukturamplituden, welche die gegenseitige Interferenz vollkommen in Betracht zieht. Die linear homogenen Gleichungssysteme für die Strukturamplituden werden auch als die Fourier-transformierten der Dipolmomente gefunden. Die Auswertung mit Hilfe der Tensorrechnung wird gezeigt im Falle einer einzigen Welle, deren Wellenlänge so zum Kristallgitter abgestimmt ist, daß keine Sekundärwellen entstehen; im Falle eines Gitters mit einfacher Basis und n Strahlen; und im Falle eines Gitters mit Basis und 2 Strahlen. Für die Auswertung im allgemeinsten Falle wird die Tensorbeziehung transformiert, bis schließlich eine allgemeine Dispersionsbedingung in der Form eines Produktes zweier Determinanten folgt, deren physikalische Deutung gegeben wird. *E. Weber.*

Relativitätstheorie.

Chou, P. Y.: Isotropic static solutions of the field equations in Einstein's theory of gravitation. *Amer. J. Math.* 59, 754—763 (1937).

A field is static if the line-element of space-time can be expressed in the form $ds^2 = U^2 dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j$ ($i, j = 1, 2, 3$), U and g_{ij} being independent of t . The author calls such a field isotropic if $g_{ij} dx^i dx^j$ is the line-element of a 3-space conformal to a flat space. Using the usual field equations (without the cosmological term) he establishes, as necessary and sufficient conditions for isotropy,

$$U_{ij} = \frac{6U}{c + U^2} \left(U_i U_j - \frac{1}{3} g_{ij} U^h U_h \right), \quad R = 0,$$

where the subscripts indicate covariant differentiation with respect to g_{ij} , R is the curvature invariant of g_{ij} , and c is an arbitrary constant. Choosing a system of coordinates such that U is a function of only one coordinate u , and restricting the argument to those fields which admit other spatial coordinates v, w such that $ds^2 = U^2(u) dt^2 + g_{11} du^2 + g_{22} dv^2 + g_{33} dw^2$, he reduces to the solution of a single partial differential equation involving a constant c the determination of isotropic fields of this type. The solutions fall into three classes according as c is zero, negative or positive. For $c = 0$, all solutions are transformable into Kasner's solution [*Trans. Amer. Math. Soc.* 27, 160 (1925)]; for $c < 0$, the author obtains as a special solution that of Schwarzschild; for $c > 0$, he obtains as a special solution

$$ds^2 = \cot^2(\Phi/2) dt^2 - \frac{\sin^4(\Phi/2)}{4k^2 \varrho^2} (d\varrho^2 + \varrho^2 d\Phi^2 + dz^2),$$

which he believes to be new, and interprets as the field of a semi-infinite plane with variable distribution of mass. He also discusses in less detail static isotropic fields in space-time occupied by a perfect fluid at rest, the cosmological constant Λ being now included in the field equations. He proves incidentally, without any assumptions of symmetry, that the Einstein static universe is the only solution of the field equations (with $\Lambda > 0$) consistent with a constant non-negative pressure. *J. L. Synge.*

Hély, Jean: Sur une théorie synthétique de la gravitation et de l'électromagnétisme. *C. R. Acad. Sci., Paris* 205, 1133—1134 (1937).

Spezielle Ausführung zu der Theorie des Verf., welche die allgemein angenommenen Grundlagen der Gravitations- und Lichttheorie durch andersartige Ideen zu ersetzen strebt. *P. Jordan (Rostock).*